

令和6年度 研究報告書

学びのつながりを重視した微分の導入における学習活動

— グラフの形を伝える活動を取り入れた授業の実践と評価 —

指導教員

吉井 貴寿 准教授

吉村 昇 准教授

令和5年度入学

熊本大学大学院 教育学研究科

教職実践開発専攻 教科教育実践高度化コース

230A9707 安達 慧

目 次

第1章	研究背景と目的	1
第1節	研究背景	1
第2節	本研究の目的	4
第3節	本研究で扱う微分の導入の概要	5
第2章	授業構築	6
第1節	予想される微分の導入の授業の流れ	6
第2節	本研究で構築した微分の導入の授業の流れ	8
第3章	授業実践	12
第1節	授業実践の概要	12
第2節	1 授業目 極限値の考え方と計算の応用	13
1.	半分にし続けるとどうなるか考察する	13
2.	極限値の意味について対話を交えた練習	16
3.	「微分係数」で出てくる形の発展問題	16
4.	次回の学習活動の予告・事前説明	17
第3節	2 授業目 グラフの形を言葉だけで伝える活動	20
1.	関数について復習	20
2.	GeoGebra を用いたお気に入りのグラフ作成	22
3.	ペアでグラフを言葉だけで伝える活動	25
4.	よりの確に伝えるために何に注目すべきかを共有	31
第4節	3 授業目 ICT による平均変化率の確認から微分係数	33
1.	クラス全体によるグラフを言葉だけで伝える活動	34
2.	点の変化に着目して平均変化率を GeoGebra で確認	35
3.	直線が消える瞬間についての考察	36
4.	「平均変化率の極限値」から微分係数	39
第5節	4 授業目 微分係数のまとめと学びのつながり	40
1.	意味に着目して微分係数を求める	41
2.	GeoGebra で微分係数を視覚化	42
3.	グラフ上の微分係数と接線の傾きに注目	43
4.	今後の学びへのつながり	44
第4章	本研究の成果と展望	47
第1節	目的達成に対する評価から本研究の考察	47
第2節	本研究の成果と今後の展望	50
参考文献		53
参考資料		54
付録		60

謝辞

学びのつながりを重視した微分の導入における学習活動
— グラフの形を伝える活動を取り入れた授業の実践と評価 —

令和5年度入学
熊本大学大学院 教育学研究科
教職実践開発専攻 教科教育実践高度化コース
230A9707 安達 慧

研究報告書要旨

本報告書は、4つの章からなる。第1章では、本研究の背景として、高等学校数学Ⅱにおける微分の導入の授業が、公式やその使い方などの表面的な内容に重点を置くような、形式的に扱われている傾向があることについて考察している。数学Ⅱにおける微分の学習は高等学校数学の根幹を成す内容であるため、表面的な内容だけを扱う形式的な授業とするのではなく、微分における学習内容のつながりを明示し全体像を把握できる導入にする必要があることから、学びのつながりに着目した。これをもとに、本研究の目的を「微分の導入において、学びのつながりを明示できるような授業の流れの構築すること」と「構築した授業の流れにより、生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うことができるかを検証すること」の2点とした。

第2章では、教科書に基づいた予想される微分の導入授業を考察し、本研究で構築した授業の流れについて述べている。「極限值と平均変化率の学習順序の入れ替え」、「グラフの形を言葉だけで伝える学習活動の挿入」、「ICT上の視覚的不思議な現象の解決による平均変化率から微分係数への移行」、「接線の傾きの位置付けの変更」といった4つの工夫を取り入れ、微分の学習を通して、形式的な計算練習に偏ることなく、学びのつながりを明確に示すことができるような授業の流れを目指した。

第3章では、本研究で構築した計4時間の微分の導入の授業について提示している。生徒の発言や実際に作成したグラフを挙げながら、各活動や授業の流れを詳細に示している。特に、2授業目における「グラフの形を言葉だけで伝える学習活動」では、生徒がグラフの特徴を数値的な数値で表現する必要性を実感する場面が見られ、微分の学習内容へのつながりを示すことができた。また、3授業目では、ICTを活用して生徒が平均変化率の値を自由に動かす活動を取り入れた。その中で2点を結ぶ直線が消えるといった視覚的に不思議な現象に着目し、その解決を目指す過程を通して、生徒が既習である極限值との学びのつながりに気づき、生徒自身で「平均変化率の極限值」について考えることができた。この章では、各活動の詳細や教師から生徒への指示を四角枠内に記載し、それを順に辿ることで、本研究で構築した授業の流れを示している。また、各場面における意図や授業設計の背景を後述している。

第4章では、本研究の成果と今後の展望を示している。授業実践を基に構築した授業の流れを評価した結果、構築した授業の流れは微分の導入段階で学習内容を把握できる学びのつながりを示すことができ、生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うきっかけを与える点で効果的であるという成果を挙げることができた。具体的には、グラフの形を言葉だけで伝える活動を通じて、生徒が注目したグラフの特徴と微分の学習内容の関連性を示した部分である。これにより、生徒は微分の学習内容全体に見通しを持つことができ、導入授業として高い効果を発揮した。また、視覚的な不思議な現象から学びを深める活動を取り入れたことで、生徒が自ら既習の学びをつなげて考える機会を提供することができ、数学に苦手意識を持つ生徒にも取り組みやすい環境を整えることができた。一方、実際の学校での実用性を高めるためには、授業時間数の削減を見据えた効率的な授業設計、ICT活用への柔軟な対応、客観的評価の導入、長期的な視点での評価といった改善すべき点が挙げられた。これらの課題を踏まえ、今後も研究と実践を継続し、生徒一人ひとりがより深く学びと向き合い、主体的に学習に取り組むことができる授業の実現を目指していく。

研究の前に

本稿では、「学びのつながりを重視した学習活動」を取り入れた高等学校数学Ⅱにおける微分の導入授業を構築し、その実践をもとに評価する。ここでは、本研究を進める上で基盤となる「育成を目指す生徒像」と「数学観」について述べる。授業展開を構築する本研究では、筆者自身の考えが授業構築に深く関係してくる。学校での経験が少ない筆者であるが、高等学校数学科教師を目指す者として、自身で検討している最中である。

まず、「育成を目指す生徒像」については、「出来事や課題に直面したときにすぐに行動するのではなく、思考をした上で、目的達成の手段として行動に移せるような生徒」と考える。これについては、「当たり前のことではないか」や「すぐに行動することも大切ではないか」、「思考すれば、どのような行動しても許されるのか」といった意見が考えられる。これは、生徒が変化の激しい予測困難な社会を生き抜くために、極めて重要な資質であると考ええる。もし、出来事に対して行動すること自体を目的としてしまうと、生徒はただ闇雲に行動するだけになり、その後の状況は考えない可能性がある。そうではなく、生徒が思考をする中で出来事を通して「どうになりたいか」「どうしたいか」を目的とすることで、目的達成の手段として必要な行動をすることができると考える。すぐに行動に移せることも大切であるという考えも理解できる。ただし、それは十分に思考をした上で行動してきた経験があつて初めて行動できるものになると考える。このような学びの過程を生徒に積ませることが教師として大切であると思われる。また、「思考すれば、手段を選ばず行動してもいい」というわけではない。「思考を重ねて、さまざまな手段から適切な行動を選んでほしい」ということである。1つの出来事に対する行動は単一なものではなく数多く存在する。その選択肢の存在を認識した上で、どのような行動を手段とするかを生徒自ら判断してほしい。それにより、その行動には責任が生じるとともに、意味のある行動となると考える。生徒が今後、様々な出来事に直面する過程で、その出来事を通じて「どうしたいのか」という目的を思考し、それを達成するために必要な行動を選択し、意味のある行動へと結びつけてほしいと考えた。

「数学観」については、「手段と目的が常に変化する中で、既習の学びと新しい学びのつながりが形成され、学びが深まり広がる」と考える。数学の学習の中に、既に学習した内容が後の学習に関連しながら広がり深まるような流れがあることに着目する。たとえば、因数分解について高等学校数学Ⅰの初めに学習し、後に学ぶ「2次関数の平方完成」ではこの因数分解の考えが活用される。平方完成を行うことで2次関数のグラフを描くことができ、さらにそのグラフを用いて最大・最小を求められる。これは、「最大・最小を求める」という目的のために「グラフを描く」という手段が使われ、学びがつながっていくことを示している。既習の内容を手段として新しい学びを深め、さらに別の学びへと広がる仕組みが数学にはあると考える。このように、数学には多様な学びが相互に関連し、それによって学びが深まり広がると考えられる。これが数学の本質にある面白さであり、学習する上で意識すべきことであると考ええる。

本稿では、以上の「育成を目指す生徒像」と「数学観」を基盤にし、高等学校数学Ⅱの微分の導入の授業を構築したうえで、実践と評価を行う。

第1章 研究背景と目的

本章では、本研究の背景と目的を明らかにする。第1節では、まず「学習指導要領」の視点から、授業設計の基盤となる目標や指導方法という根本的な部分に焦点を当てる。次に先行研究に基づき、形式的な授業になる原因や、その結果として生じる影響的な部分を考察する。さらに高等学校の数学科教師の視点を基に、実際に学校ではどのような授業が行われているかという現状に焦点を当てて分析する。これら3つの視点から、微分の導入部分の授業が公式やその使い方といった表面的な内容に重きを置くような、形式的に扱われている傾向があることを考察し、本研究の背景を明確にする。続く第2節では、本研究の目的と、その目的を評価するための指標・方法について述べる。さらに第3節では、学習指導要領を基に、微分の単元に関する本研究の対象となる学習内容について考察する。

第1節 研究背景

本研究は、高等学校数学Ⅱにおける微分の導入の授業が、公式やその使い方に重きを置く、形式的な扱いになる傾向があるという背景を踏まえて行うものである。この背景について、「学習指導要領」「先行研究」「高等学校の数学科教師」の3つの視点から考察する。その前に、本稿で使用する「形式的に」という言葉の意味について整理する。「形式」とは、『現代新国語辞典』（金田一春彦・金田一秀穂，2017）によると、「その物事の様式としてあらかじめ決められている形・方法」を指す。また、「形式的」とは「内容よりも形式を重んじるようす」とされている。これを踏まえ、本稿で用いる「形式的に」とは、「公式そのものや使い方など、学習内容の表面的な成果(解けるか解けないか)に重きを置く状態」を意味するものとする。したがって、本研究は、「高等学校数学Ⅱにおける微分の導入の授業が、公式やその使い方を重視し、表面的な成果に重点を置く傾向がある」という現状を背景とする。ここで、本稿が現行の指導内容や授業実践を批判することを目的としていない点を明記しておく。あくまで現状を分析・把握した上で、目的を明確にした授業構築を行い、その授業実践をもとに評価を行うことが本稿の主旨である。

第一に、学習指導要領の役割と、それが授業設計の基盤となる理由について分析する。学習指導要領とは、どの地域で教育を受けても一定の水準で教育を受けられるようにするために定めた、教育課程(カリキュラム)を編成する際の基準である(文部科学省，2011)。各学校では、学習指導要領を踏まえ、地域や学校の実態に応じて教育課程(カリキュラム)を編成している(文部科学省，2011)。したがって、学習指導要領は教師が授業設計を行う際の基盤として機能しており、指導の目標や学習内容、指標が示されている。それを基に、各学校や学級の実態に合わせた授業を設計している。学習指導要領(2018, p. 23)では、高等学校数学科全体の目標を、「(1)知識及び技能、(2)思考力、判断力、表現力等、(3)学びに向かう力、人間性等」の三つの柱に基づいて示すとともに、それら数学的に考える資質・能力全体を『数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して』育成することを目指す」としている。ここでは、高等学校数学科の目標として「知識及び技能」「思考力、判断力、表現力等」「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱が掲げられている。さらに、数学Ⅱの目標もこれら三つの柱に基づいて設定されていることから、数学を指導する際にはこれらを意識することが重要であることが読み取れる。

しかし、学習指導要領(2018, p. 64)が示す「微分・積分の考え」の指導の記述では、「知識及び技能」と「思考力、判断力、表現力等」の2つについて具体的に指標が示されている一方で、「学びに向かう力、人間性等」についての指導の指標が明確に提示されていない。教師が学習指導要領を基に授業を設計する際、明確な指標が示されている「知識及び技能」と「思考力、判断力、表現力等」については、この記述を参考にして授業を設計することが可能である。しかし、具体的な指標が示されていない「学びに向かう力、人間性等」については、教師の授業設計時に意識されにくくなる可能性がある。「学びに向かう力、人間性等」に

ついて、数学や問題に対する生徒の学びに向かう態度や創造性の基礎を養うことを目指しており、問題が「解けるか解けないか」といった表面的な成果ではなく、生徒の内面的な姿勢やプロセスに重点を置いている。また、「現在及び将来にわたって数学を学んだり、数学を活用したり、数学と接したりするときの構え(基盤)となるもの」(文部科学省, 2018, p. 29)と位置付けられており、数学教科を指導する上で欠かせない要素であると考えられる。教師が授業を設計する際に、生徒をどのような姿勢で学習に取り組ませるかを示す指標となるのが「学びに向かう力、人間性等」であるといえる。生徒に「何を学ぶか」ではなく、「どのように学ぶか」を意識させるためには、教師自身がこれを十分に意識しておく必要があると考える。「学びに向かう力、人間性等」に関する具体的な指標が単元ごとの指導の指標に示されていない現状では、教師が授業設計を行う際にこれを意識する機会が減り、結果として授業内で軽視される可能性がある。それにより、指標が明確な「知識及び技能」や「思考力、判断力、表現力等」に偏った授業が行われやすく、学習内容の習得自体を目的とする形式的な授業設計に陥る恐れがある。特に、微分の導入の学習内容である微分係数については、「意味について理解し」「求めることができる」という言葉を用いて指標が示されているため、「知識及び技能」と「思考力、判断力、表現力等」に偏った授業が行われる傾向があると考えられる。教師が「学びに向かう力、人間性等」を十分に意識し、生徒の内面的な成長やプロセスを重視した授業設計を行うことが求められる。

第二に、先行研究を踏まえて考察する。ここでは、微分の学習において形式的な授業になる傾向とその影響を問題視し、多様な視点から授業構築する先行研究を取り上げる。坂井(2020)は、微分や積分の学習が本質的な概念は直感にまかせ、操作の習熟を中心に計算を行うような授業に偏っているという実態と、その結果、生徒が問題を批判的に眺めたり、数学的背景を探ったりする姿勢が十分に養われているとはいえない点を問題視している。これを出発点とし、微分という抽象的な概念を獲得するための生徒の活動モデルとして、微分定規を用いた学習活動を構築した。山口(2014)は、現在の高等学校での微分の学習は、形式的な計算の習熟にだけ終始しがちで、生徒の「微分する」ことの意味理解が十分とは言えない状況にあるという実態を述べている。また、その結果、生徒は形式的な微分計算はよくできるようになるが、微分の意味理解には至らず、微分のよさや微分を学ぶ意義が見いだせないという現状を述べている。それを踏まえて、高等学校数学Ⅱについて学習指導要領や各教科書をもとに精査する中で、微分学習の内容構成の類型化を図り、微分学習の導入における指導上の留意点について明らかにした。また、須崎(1991)は、広い分野に応用されている微分積分における学習の全体像がつかみにくいという問題点があることを述べている。そこから、微分積分における基礎的な概念の形成過程と生徒が学習上つまづく箇所とその原因について考察し、学習内容の定着を図る指導のあり方について分析している。

具体的な内容としては、次の通りである。坂井(2020)が使用した微分定規は、フリーハンドで描いた曲線に対して、その導関数の作図を行うことができ、生徒が数学的なよさや微分の本質を捉えることのできる教材である。これは、「教える教材」ではなく「学ぶ教材」として有効性のあるものと示している。また、微分の代数的な公式について、学習が概念獲得と公式の習熟とのバランスを欠くことがないように、適切なモデルや教材が用意されていることが必要であると考察されている。また、山口(2014)は、5社の教科書を参考に高等学校数学Ⅱにおける微分学習の内容構成を明らかにした結果、微分学習の導入時の授業構成に、微分学習の導入時の構成の違いと微分係数や極限値に関わる説明の記述の違いが見られた。それを基に、「微分する」ことの意味理解には極限値の「限りなく近づく」ということの意味を生徒が捉えることが必要であると考えた。また、「微分する」ことの意味理解には、瞬間の速さをどのようにして求めるのかということを生徒に考えさせ、近似値の計算を使用し、平均の速さが限りなく近づくことを確かめさせる指導と瞬間の速さについて考えたことを基に、極限として接線を生徒が作図する活動を通して、微分学習で対象とする接線の定義を捉えさせる指導といったような丁寧な指導が必要であると明らかにしている。

須崎(1991)は、高等学校数学科「基礎解析」「微分・積分」について教育者へのアンケート調査から、生徒が学習上つまずきやすい箇所とその原因について考察した。その結果、計算に関する分野が一番多く、その次に、微分係数、導関数の意味や定義と続いていることが明らかになった。計算に関する分野で生徒がつまずく原因として、学習内容の計算が複雑であることや生徒が公式を適用して問題を解く時に、やっている計算の意味が理解できていないことを挙げている。教師が指導する際、生徒が計算を習熟することと、生徒に計算の意味を理解させることが必要であると述べている。また、意味や定義で生徒がつまずくのは、平均変化率の極限として微分係数をとらえることに難しさを感じるのが原因であると述べられている。どちらも、生徒が学習内容の意味を十分に理解できていないことが原因であると考えられる。

以上のことから、微分の学習は計算の習熟が中心に扱われており、その結果、生徒が学習内容の意味を考えることができず、学ぶ姿勢や微分を学習する意義を認識することなく授業が進んでいると考えられる。また、学習を進める中で、生徒がつまずく原因として、やっている計算の意味や定義の理解ができていないことが挙げられる。学習内容の意味理解よりも計算の習熟を目指した形式的な授業を行われることで、やっている計算の意味や定義の理解できずに授業が進み、結果的につまずく生徒が現れると考えられる。これは、「学習内容の意味理解よりも計算の習熟を目指した形式的な授業を行う」ということが要因になっていると考えられる。

第三に、高等学校の数学科教師が実際に行っている授業から考察する。ここでは、高等学校で教育に携わる数学教師が、普段どのような授業を行っているかについて、インタビュー調査をもとに分析を行う。その際、普段行われている「微分」の授業について、次の要領で調査を実施した。

＜対象＞ 熊本県内の高等学校に所属する数学科教師(8名)

＜方法＞ インタビュー調査(音声記録をもとに発言内容を分析。)

＜時期＞ 令和6年6月～7月

＜内容＞ 「学校の実態を踏まえて行っている(または行ってきた)微分の授業の流れについて」「微分の導入(微分の学習の初めから接線の傾きまでの学習)をどのくらいの授業時間数で行うか」「生徒の実態と授業の様子・理解度について」

この調査から、①導入部分は基本的に教科書通りの流れ、②公式や計算方法を重要視、③評価方法は「求められるか」が中心、④導入部分は通常3時間、短縮する場合は1.5時間、⑤生徒は、微分の目的や意味はほとんど分かっておらず、公式として暗記している、⑥「微分の問題だから微分をする」と考える生徒がいる、という6つの実態について挙げられた(参考資料(1)参照)。ここから、「教科書の流れに沿って、公式や計算方法などの学習内容を重要視し、表面的な成果を評価対象としている」という授業を行っている実態があることが明らかになった。その結果、生徒は公式を覚えて使えるようになる一方で、意味の理解は不十分であることが確認された。これらの実態は、学校の進度や生徒の実態、教師の教師観や指導観といった授業スタイルに関する複数の要因が絡み合った結果であると考えられる。さらに、授業時間数の制約についての発言も見られた(参考資料(2)参照)。実際の学校では十分な授業時間を確保できない場合があることが明らかになった。授業時間数が限られているため、その時間内に指導内容を網羅する必要がある、結果として表面的な公式や計算方法を中心に扱わざるを得ない状況があると考えられる。実際、「ミサイルの軌道をわかりやすくするために微分って作られたよとかを取り入れていた」や「教科横断的部分みたいな Well-being みたいなのができればな」という発言があるように、生徒の理解を深めるために様々な授業設計を試みようとする教師がいることは確かである。これは必ずしも「形式的な授業」を望んでいるわけではないことを示している。このことから、実際の学校では「時間がないから、形式的な授業をせざるを得ない」となってしまう実態があると考えられる。ただし、時間がないから、形式的な授業で良いというわけではないことに留意すべきである。この調査から明らかになったのは、「教科書の流れに沿って公式や計算方法を重要視し、表面的な成果を評価対象とするような形式的な授業をやむを得ず行って

いる」実態である。限られた時間の中で、どのように指導を工夫するかが課題として明らかになった。

学習指導要領の分析から、授業設計の基盤となる目標や指導方法という根本的な部分に焦点を当て、先行研究から読み取ることで、形式的な授業になる原因やその影響という結果的な部分について考察した。また、高等学校の数学科教師が、実際に学校でどのような微分の授業を行っているかという現状に焦点を当てて分析を行った。以上を踏まえて、本研究の背景としては、「高等学校数学Ⅱにおける微分の導入の授業が形式的に扱われている傾向がある」と結論付けられた(p.1 参照)。このようにして導き出された背景を踏まえ、次節では本研究の目的と方法を述べる。

第2節 本研究の目的

研究背景を踏まえ、本研究の目的を次の①、②と設定する。目的①は、「微分の導入において、学びのつながりを明示できるような授業の流れを構築する」ことである。目的②は、「構築した授業の流れにより、生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うことができるかを検証する」ことである。ここで、本研究は現行の指導内容や授業実践を批判するものではなく、「学びのつながり」を重視した活動を取り入れた微分の導入における1つの授業の流れを構築し、その実践をもとに評価するものであることに注意する。微分の導入の授業が形式的になりやすい傾向や、全体像がつかみにくいという実態を踏まえ、目的①を掲げた。数学Ⅱにおける微分の学習は高等学校数学の根幹を成す内容であり、数学Ⅱまで学習する生徒にとっては学びの集大成、数学Ⅲまで学習する生徒にとってはその基盤となる重要な導入部分であると考えられる。このような重要な内容である微分の導入を、表面的な内容を扱う形式的な授業とするのではなく、微分における学習内容のつながりを明示し、全体像を把握できる導入にする必要があると考えた。また、授業設計の際に指導の基準となる学習指導要領には、「学びに向かう力、人間性等」の指標が明確に記載されていない。この点が授業設計時に意識されにくくなる一因であると思なせる。そのため、生徒が「学びに向かう力、人間性等」を養うことができるような授業が必要であると考え、目的②を掲げた。

2つの目的の達成状況を、次の3つの指標をもとに評価する。指標Ⅰとして「学びのつながりを示せるような有用性のある授業であるか」、指標Ⅱとして「生徒が学びのつながりを認識することができるか」、指標Ⅲとして「生徒が主体的に学習に取り組めるようになるか」と定める。指標Ⅰは、本研究で構築した授業の流れが学びのつながりを明示し、微分の導入授業として有用であるかを評価する。指標Ⅱは、授業中および授業後に、生徒自身が学びのつながりを認識できたかを評価する。指標Ⅲは、構築した授業によって、生徒の主体的に学習に取り組む態度を養うことができるかを評価する。それぞれの位置付けとしては、指標Ⅰが目的①の評価、指標Ⅱが目的①と目的②の関連評価、指標Ⅲが目的②の評価に対応している。以下に、それぞれの指標の評価方法を示す。

指標Ⅰの評価方法として、授業実践後に高等学校数学科の教師へのインタビュー調査を行う(参考資料(3)参照)。授業の流れやつながりの有無を評価するにあたり、既に学習内容の全体像を把握している数学科の教師の視点が最も的確であると考えられる。また、時間が限られている学校において、構築した授業が実際に再現可能であるかという視点からの評価も重要である。本研究は、理論的な研究に留まらず、実際に学校で、筆者を含めた多様な背景を持つ教師にも再現可能な授業を構築することを目指している。そのため、数学科教師の視点をインタビュー調査を通じて反映させ、授業の有用性を評価する。

指標Ⅱの評価方法として、授業実践したクラスの生徒に対して事後アンケート調査を行う(参考資料(3)参照)。これにより、生徒が学習活動や授業を通して、実際に学びのつながりを実感することができるかを評価する。また、授業内で意図的に学びのつながりを活用する機会を設けており、実際に生徒がそれを認識することができたかも評価する。これにより、数学の学習内容に明確なつながりがあることを主体

的に理解させ、単なる公式暗記にとどまらず、数学の本質や意義に気づかせることを目指した。授業では生徒自身が主体となって学習活動に取り組むことが重要であり、生徒が学びのつながりを実感できたかが授業の評価基準となるため、生徒へのアンケート調査を通じて分析する。

指標Ⅲの評価方法としては、指標Ⅰと同様に、授業実践後に数学科の教師へのインタビュー調査を行う(参考資料(3)参照)。学習の導入段階で学びのつながりを示すことで、生徒が学習の全体像を把握し、主体的に学習に取り組むようになるかを評価する。数回の授業で生徒自身が自分の学習に取り組む態度の変化を的確に評価するのは難しい場合があるため、教育者として学校で生徒の様子を普段から観察している教師ならではの視点での評価が重要であると考えた。本研究で構築した授業の流れや学習活動について、教育者としての視点を持つ数学科教師へのインタビュー調査をもとに評価を行う。

第3節 本研究で扱う微分の導入の概要

本研究では、高等学校数学Ⅱ「微分・積分の考え」のうち、微分の導入段階の授業を構築する。この節では、本研究で扱う学習内容について学習指導要領に基づき整理する。なお、「微分・積分の考え」における、微分の内容のみを取り上げて、以降、「微分の考え」と呼ぶ。

数学Ⅱの性格について、学習指導要領(文部科学省, 2018, p. 52)では、「より多くの生徒が、高等学校数学の根幹をなす内容について学習し数学的に考える資質・能力を育てるため、『数学Ⅰ』の内容を発展、拡充させる」と述べており、数学Ⅱは高等学校数学において根幹を成し、前後の学習に深く関わる重要な役割を担っているといえる。数学Ⅰの学習内容をより発展させ、より広げつつ、数学Ⅲへとつなげるような位置付けがされている。また、数学Ⅲの性格については、「数学に強い興味や関心をもってさらに深く学習しようとする生徒や、将来、数学が必要な専門分野に進もうとする生徒が数学的に考える資質・能力を伸ばすため、『数学Ⅱ』の内容を発展、充実させる」(2018, p. 71)と述べられている。これから、数学Ⅱにおける「微分・積分の考え」は、数学Ⅲの学びに直結する重要な内容であり、数学Ⅱ全体の中心的な要素を担っているといえる。具体的に、数学Ⅱでは前半に微分を学習し、後半に積分を学習する。この構成からも、数学Ⅲを履修する場合における学びの基盤が「微分の考え」の段階で築かれることがわかる。数学Ⅲにおいても微分の学びを深める機会があるが、その基礎的な概念や知識は数学Ⅱの段階で習得される必要がある。このため、数学Ⅱにおける「微分の考え」はその後の学びを深める上で不可欠であり、また数学Ⅲを履修しない場合においても、高等学校数学における最終段階として位置付けられる。そのため、学習者の進路に応じた指導に注意が必要である。

本研究では、この「微分の考え」の導入段階、特に微分の定義に関連する「微分係数」を扱う部分に着目する。新出用語として「平均変化率」「極限值」「微分係数」を学習し、微分係数を「接線の傾き」と関連づける部分までである。具体的には、『NEXT 数学Ⅱ』(岡部恒治ほか, 数研出版, 2024)における「第6章 微分法と積分法 第1節 微分係数と導関数 1 微分係数」の「A 平均変化率」「B 極限值」「C 微分係数」の部分である(該当教科書 p. 206-212 参照)。本稿では、この部分を「微分の導入」と呼ぶ。この微分の導入は、数学Ⅱまで学習する生徒にとっては、高等学校数学の最後の内容の導入部分に、数学Ⅲまで学習する生徒にとっては、数学Ⅲの基盤となる導入部分となる。そのため、どの生徒にとっても微分の単元の始まりとして重要な部分であり、十分な指導が求められる。しかし、現状としては、第1節で述べたように、微分の学習全体で公式やその使い方を重視し、表面的な内容に重点を置くような形式的に扱われている傾向が見られる。特に、微分の導入においては、意味理解よりも公式やその使い方に重きが置かれていることが、学校の数学科教師へのインタビュー調査から明らかになった。このように、高等学校数学を学習するすべての生徒にとって重要であるにもかかわらず、十分な指導が行われにくい傾向がある微分の導入に着目した。以上を踏まえて、次章では、学びのつながりを重視した学習活動を取り入れた授業の流れを構築する。

第2章 授業構築

本研究は、高等学校数学Ⅱにおける微分の導入部分に焦点を当てる。学びのつながりを重視した学習活動を含む授業の流れを構築し、その実践を通じて評価を行うことを目指している。この章では、本研究で構築した授業の流れにおける工夫点について述べる。第1節では、学校で使用されている教科書に基づき、標準的な授業の流れについて予想して考察する。その際、高等学校の数学科教師のインタビュー調査で得られた、実際の授業内容や指導法を参照する。第2節では、予想される授業展開の考察を踏まえ、本研究で構築した授業の流れにおける「極限值と平均変化率の学習順序の入れ替え」、「グラフの形を言葉だけで伝える学習活動の挿入」、「ICT上の視覚的不思議な現象の解決による平均変化率から微分係数への移行」、「接線の傾きの位置付けの変更」といった4つの工夫点を中心に具体的な内容を詳述する。

第1節 予想される微分の導入の授業の流れ

第1章の高等学校数学科教師へのインタビューでは、微分の導入部分の授業は基本的に教科書通りに進められていることが明らかになった。そのため、「教科書通り」の授業とはどのような流れであるかについて考察する必要がある。本節では、教科書の構成とインタビュー調査の結果を基に、授業実態を分析し、学校で行われている授業の流れを予想する。ただし、単に予想するだけでなく、予想した授業の流れを学校の数学科教師に提示し、その意見を踏まえて改善する。本研究で予想した授業の流れが、学校での実態に合致しているかを確認することで、予想される授業展開の妥当性を検証する。なお、本研究で参考とする教科書は、研究協力校で使用されている教科書『NEXT 数学Ⅱ』（岡部恒治ほか、数研出版、2024）である。『NEXT 数学Ⅱ』（2024）では、微分の導入で学ぶ内容として、「関数のグラフの変化の様子を、極限を用いて、非常にせまい範囲に着目して考えること」が示されている。以下では、教科書の学習の流れを確認しつつ、予想される授業展開について考察する。

関数の変化の様子を調べる方法として、中学校で学習した変化の割合¹を一般化した考え方である平均変化率を扱う。関数の変化の様子を調べるために平均変化率を定義している。また、この平均変化率は関数 $y = f(x)$ のグラフ上の2点を通る直線の傾きを表していることを確認する。その後、平均変化率を求める例題を提示し、練習問題が出題されている。この部分における学習目標は「平均変化率が求められるようになる」と記載があり、この練習問題の達成を目標として設定されている。次に、非常にせまい範囲に着目する方法として、高等学校数学での新しい考え方である極限値を扱う。ここでは、先ほどの例題における平均変化率 $2 + h$ の値について、 x の変化量 h を0の両側から0に限りなく近づけるときの値の変化を表を用いて示し、記号 $\lim$ を用いて $\lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2$ と表すことを例示する。それを踏まえて、極限値を定義している。その後、関数の極限値を求める例題を提示し、練習問題が出題されている。この部分における学習目標は「極限値が求められるようになる」と記載があり、この練習問題の達成を目標として設定されている。ただし、この段階では「なぜ新しい極限値という考え方を学ぶのか」が明確に記されていない。実際、数学Ⅱにおける極限値の指導については「直感的に理解させるよう扱うもの」（文部科学省、2018、

¹ 中学校で学習する「変化の割合」は、「 x の増加量に対する y の増加量の割合」（文部科学省、2017、p. 118）と定義されている。また、一次関数 $y = ax + b$ において、 x の係数 a は、 x の値が1だけ増加したとき、対応する y の値がどれだけ増加するかを表している（文部科学省、2017、p. 118）。このことから、「平均変化率」は特に「 x の値が1だけ増加したときの y の値の増加量」に着目する変化の割合をより一般化した概念であるといえる。

p. 64) としており、定義の直感的な理解が求められている。次に学習する微分係数を定義するためには、極限値の概念が不可欠である。しかし、数学Ⅱでは学習範囲が限定されているため、極限値についての指導は形式的な計算練習を中心とした指導にとどまる傾向があると考えられる。平均変化率と極限値について学習をした後に、「208 ページで考えた平均変化率について、その極限値を考えてみよう」と記載があり、そこから微分係数を定義している。また、微分係数の定義を表現した $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ という

式が掲載されている。微分係数の定義を簡潔に表現すると、「平均変化率の極限値」であり、微分係数 $f'(a)$ を式で表すとこのような式となる。ここでは、この式が言葉での定義を式として表現したものである点に気を付ける必要がある²。これは、生徒が微分係数 $f'(x)$ を求めるために覚えるべき式と理解し、「微分係数を求めるためにこの公式が必要で、覚えないと求められないもの」と誤って認識する可能性がある。このような形式で提示されることで、「暗記すべき内容」として認識されてしまう危険性があるため、教師からの注意が必要となる。ここで、教科書に記載されている「平均変化率について、その極限値を考えてみよう」に着目する。「なぜ平均変化率の極限値を考えるか」といった微分係数を定義する理由について明確に言及されることなく進められている。ここでは、「なぜ平均変化率の極限値を考えるか」よりも「議論を進めるため」という観点が優先されているといえる。この「議論を進めるため」とは、「微分を学習するため」という意味であり、微分係数を定義し、それを基に導関数を定義し、さらに微分の学習内容を展開していく流れを指している。教科書に記載された通りに授業を展開していくと、「微分の学習を進めるために、その起点となる微分係数を取り決め、それを求める式を確認する」という形式的な授業になると考えられる。このような流れは、第 1 章で指摘した「公式やその使い方に重点を置いた形式的な授業になる傾向」と関連していることがわかる。ここで再び教科書の構成に目を向けると、微分係数を定義した後、微分係数を求める例題を提示し、練習問題が出題されている。続いて、「ここから、関数 $f(x)$ が $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ をもつとき、グラフにおける $f'(a)$ の図形的な意味を調べてみよう」と記載があり、グラフにおける微分係数の図形的な意味について調べる誘導を示している。平均変化率の図形的な意味として、グラフ上の 2 点を通る直線の傾きを表すことを確認した後、極限値を用いて 2 点を近づけることで、平均変化率の極限値である微分係数を図形的な視点から調べる。その後、微分係数を用いて接線の傾きを求める例題を提示し、練習問題が出題されている。この部分における学習目標は、「微分係数の意味を理解し、接線の傾きが求められるようになろう」と記載があり、この練習問題の達成を目標として設定している。

以上のような流れで、教科書では微分の導入を展開している。平均変化率と極限値を段階的に定義し、平均変化率に極限値という考え方をを用いることで微分係数を定義する。その後、微分係数の図形的な意味に着目し、接線の傾きと等しいことを確認する。この流れと学習内容を踏まえ、予想される授業の流れとして、図 1 のように表現した。

² 大蔵(2016)によると、定義とは「議論を進めるために人が勝手に作った取り決めを記した文章」であり、定理とは「公理から導き出され、定義された言葉のみで構成された正しいことを証明できる文章」であると述べている。ここでの公理とは「理由なく正しいとする文章」のことである。また、公式については、「左辺を右辺の文字式で説明する等式。左辺を求めるための計算。恒等式によって表される定理。」という考えがある(木村, 2020)。このことから、定理や公式は定義の上に成り立っており、いずれも定義とは異なるものであることがわかる。

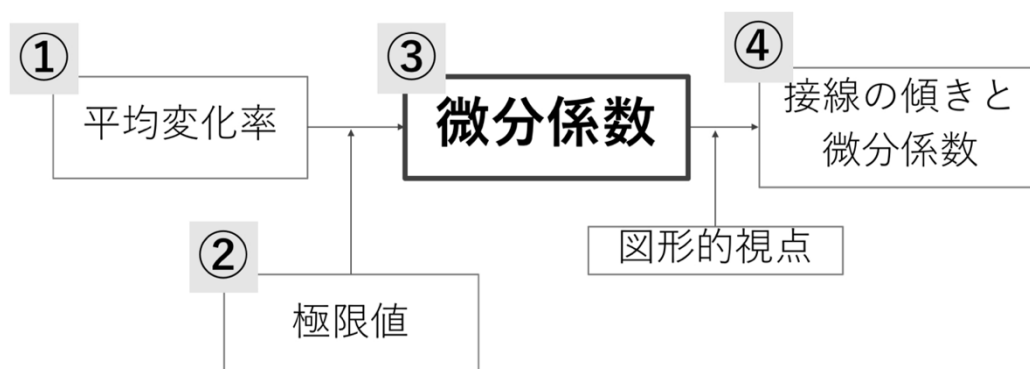


図1 予想される微分の導入の授業の流れ

この図は、高等学校の数学科教師から得た普段の授業の流れを基に作成し、完成後に意見を伺い、一部修正したものである。そのため、実際の学校で行われている授業の流れに近いものになっていると考えられる。3コマの授業時間で、単元の始まりの導入から接線の傾きの学習を進めていく。学習目標としては「求められる」ことに重心が置かれ、主に計算練習が中心となっていることが読み取れる。①の平均変化率の後、微分係数を定義するために新しい概念である極限值が必要になるため、極限値の学習を行う②の時間を一旦設けて、それを用いて微分係数につなげられる流れとなっている。また、教科書の学習目標である「微分係数の意味を理解し、接線の傾きが求められるようになろう」とあるように、微分係数を図形的視点から捉え、接線の傾きが求められることを微分の導入における最終的な目標としていると考えられる。教科書に沿った授業を行う場合、図1のような授業の流れになる可能性があると予想される。

第2節 本研究で構築した微分の導入の授業の流れ

本研究では、予想される授業の流れを踏まえて、「学びのつながり」を重視した学習活動を取り入れた新たな微分の導入の授業の流れを構築した。微分の学習を通して、形式的な計算練習に偏ることなく、学びのつながりをより明確に示すことができる授業を目指している。具体的には、次の図2のような微分の導入の授業の流れを提案する。

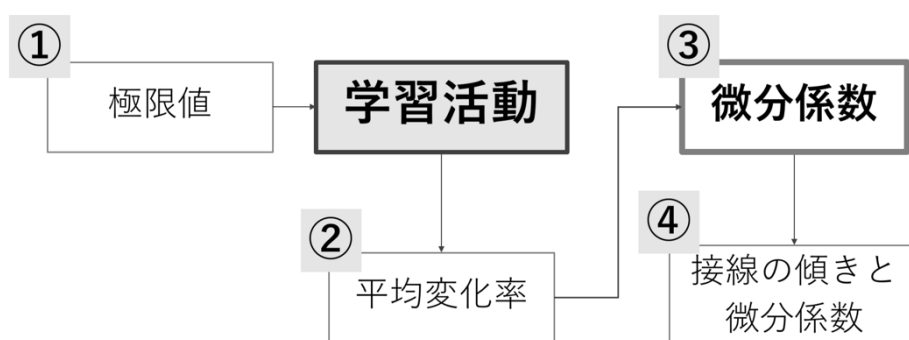


図2 本研究で構築した微分の導入の授業の流れ

構築した流れでは、微分の単元のはじめに極限値の学習を行う。次に、本研究の主である学びのつながりを重視した「グラフの形を伝える学習活動」を挿入する。その活動を通して、点と点の変化に着目し、中

学校数学での変化の割合を発展させ、平均変化率を学習する。さらに、ICT を活用して平均変化率を視覚的に動かしながら生じる生徒からの疑問を出発点として、既習の極限值へとつなげ、微分係数を定義する。微分係数について ICT を活用して理解を深める中で、接線の傾きと等しくなることを確認する。④の接線の傾きと微分係数の関係は、学びを進める中で得られる気づきとして扱い、「微分係数の意味を理解すること」を微分の導入における最終的な目標とした。

図1の予想される授業の流れと比較すると、「極限值と平均変化率の学習順序の入れ替え」、「グラフの形を言葉だけで伝える学習活動の挿入」、「ICT 上の視覚的不思議な現象の解決による平均変化率から微分係数への移行」、「接線の傾きの位置付けの変更」という4点に違いがある。そこに、本研究で構築した授業における工夫が反映されている。以下では、その工夫した内容と意図について述べる。

工夫点①は、極限值と平均変化率の学習する順番の入れ替えについてである。予想される流れでは、「平均変化率→極限值」の順で学習を進める。この流れでは、平均変化率を学習した後に、唐突に「極限值」が導入される形となっている。微分係数を定義するためには極限值という新しい考えが必要だが、授業の流れが「平均変化率/極限值→微分係数」のように、一度途切れてしまう可能性がある。これは、生徒にとって平均変化率と極限值が独立した学習内容として扱われるように感じられ、関連性が認識されにくくなる。その結果、生徒はそれぞれを計算して求めること自体が目的であると捉えてしまい、学習内容のつながりを意識することが難しくなる可能性がある。一方、本研究で構築した流れでは、極限值を先に学習することで、新しい考え方を手段として十分に習得する機会を設けている。これにより、生徒は「学習活動→平均変化率→微分係数」という途切れのない学習の流れを体験できる。この工夫は、工夫点③で述べる「平均変化率から微分係数への移行」の際に、極限值が既習の学びとして自然につながる重要な役割を果たす。さらに、後に学習する「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数」を求める計算の際に出てくる途中式の形と同じ、極限値の計算練習を発展問題としてこの段階で出題する。微分係数を学習する中で、生徒にとって、唐突な計算の手順を用いる必要があり、微分係数の計算が難しいと感じる可能性がある。それにより、生徒は計算方法自体に着目する流れとなり、形式的な学習となってしまう。そこで、後に出てくる途中式の練習を、発展問題として事前に扱うことで、微分係数の計算をする際に一連の手順を理解しやすくすることを目指している。それにより、計算自体ではなく、その意味に着目できる余裕を生徒に与えられると期待される。

次に、工夫点②は、今後の微分の学びとつながる「学習活動」の挿入である。予想される流れでは、「微分の意味や必要性、学習内容」について体系的に示される場面はあまり見られない。そのため、授業の冒頭の部分で教師自身が「微分の意味や必要性、学習内容」について語ることになる。実際、インタビュー調査でも、「(導入として、車の)スピードとかの話をする」や「(微分の導入において、)ミサイルの軌道をわかりやすくするために微分って作られたよとかを取り入れてた」といった発言が挙げられたことから、導入の部分で教師から話をしている実態があることがわかる。しかし、生徒が授業の中で実際に微分を用いて車の瞬間の速さを調べたり、ミサイルの軌道を予測したりする機会が設けられているとは限らない。そのため、生徒はこうした教師からの話を「単なる教師の話」として捉えられてしまい、微分の意味や必要性を実感しないまま、微分の学習に入ってしまう可能性がある。これに対して、構築した流れでは、その「微分の意味や必要性、学習内容」を学習活動を通じて、生徒自身で気づくことができるような工夫を行った。具体的には、「グラフを言葉だけで伝える学習活動」を挿入し、グラフのどのような特徴に着目すべきかを生徒自身で考える場面を設けた。この活動を通じて、生徒は感覚的で曖昧な表現だけではグラフの形を伝えることが難しいと感じる体験をすることができる。そこで、どのような特徴に着目する必要があるか思考した上で、それを共通の認識のある数学的な数値として伝えることの重要性を実感できる。また、活動の中で気づいたグラフの特徴が、今後の微分の学習内容とつながることを示すことができる。例えば、「上がり具合・下がり具合」→「微分係数・接線の傾き」や「山・谷」→「極大値・極小値」、「グラフの形」→「増減

表」のように、生徒自身で活動を行う中で見つけたグラフの特徴が、その後の学習内容に直接つながる。数学的な数値での表現の必要性を生徒に実感させつつ、生徒の気づきを基に、微分単元の学習全体を自然に示すことができる。

工夫点③は、ICT 上での視覚的な疑問から微分係数への移行についてである。予想される流れでは、「平均変化率→極限值」と学習し、「平均変化率の極限值を考えてみよう」という記述や問いかけから微分係数を定義するような流れであると考えられる。しかし、この流れでは「なぜ平均変化率の極限值を考えるのか」に対する言及はなく、「微分係数を定義するために必要だから」という理由に留まっていると考えられる。その結果、生徒にとって微分係数は単に新しく考え出されたものと認識し、定義を表した式は暗記すべき公式として捉える可能性がある。一方、構築した流れでは、平均変化率を GeoGebra を活用して生徒が自由に値を動かす中で生じる視覚的に不思議な現象を体験することで疑問を抱き、その対処法を考える過程を通じて微分係数を定義することができるような流れを設計している。実際に、GeoGebra 上で平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の a や h をの値を変える中で、 $h = 0$ のときだけ、2 点を通る直線が消える現象が確認

できる。ICT 上では $h = 0$ の場合、分母が 0 となり定義できないため、直線が描かれなくなるのは理論的に当然のことである。しかし、この瞬間的な変化を初めてみる生徒にとって非常に不思議なことに感じられると考えられる。この視覚的に不思議な現象に着目させ、直線が消える原因とその対処法を考えさせることで、原因は「2 点が同じ位置に存在し、2 点間の距離がないため」や「平均変化率の分母が 0 になるため」などとわかる。また、それを対処するためには、「 h を 0 ではないけど 0 に限りなく近づける」という極限値を活用すれば良いと、生徒自身で気がつくことができる。こうして生徒が「平均変化率の極限值」に自ら気づくことで、それ自体が微分係数であることを確認する流れを構築することができる。この際、工夫点①で極限値を先に学習しているため、この部分で改めて「極限値」の時間を設ける必要がなく、既習の学びが自然につながるような円滑な流れとなる。また、教科書や教師が「平均変化率の極限值を考えてみよう」と指示するのではなく、生徒自身が「平均変化率の極限值を考えてみた」という体験を通じて微分係数にたどり着くことで、その意味理解に深く影響すると考えられる。

最後に、工夫点④は、接線の傾きの位置付けの変更である。予想される流れでは、微分の導入における最終的な目標は「接線の傾き」とであると読み取れる。教科書では、「微分係数の意味を理解し、接線の傾きが求められるようになる」と学習目標を設定しており、この目標に向かう過程で、微分係数を定義した後に図形的な視点で考えるような流れになっている。また、教科書においても、「グラフにおける図形的な意味を調べてみよう」として、微分係数と接線の傾きが等しいことを確認する場面が記載されている。この内容は重要であるが、この流れでは「微分の導入では『微分係数と接線の傾きが等しい』ことを理解すれば十分である」と生徒が捉えてしまう可能性がある。また、この部分に続く学習内容として導関数があり、接線の傾きは接線の方程式の学習まで扱われることはない。そのため、微分係数を定義した後に、接線の傾きと等しいことを確認し、再び微分係数に着目して導関数を定義する、という流れの中で、学習内容が一時的に分断される可能性がある。一方、本研究で構築した流れでは、「接線の傾き」を微分係数の学習を深める過程で自然に導き出される内容として位置付けている。そのため、微分の導入における最終的な目標は「微分係数の意味を理解すること」である。この流れにより、生徒は微分係数を深く理解する中で、「接線の傾きと等しい」という事実を確認し、その後、微分係数を拡張して「 x に対応して微分係数 $f'(x)$ 」に対応させると、 x の関数が得られ、それを導関数とする」という流れに、途切れることなく進めることができる。微分の導入における最終的な目標を「微分係数の意味を理解すること」にすることで、授業の流れがより明確になり、その後の導関数とのつながりも強調される。この変更は、単に学習目標を変えるだけでなく、微分の導入における目的を明確にし、生徒の「微分すること」の意味理解に良い影響を与えると

考えられる。また、導入の授業であるからこそ、以降の学習内容とのつながりを意識することが重要であり、この工夫はその役割を果たすものである。

以上の4点の工夫を取り入れ、微分の導入段階における授業の流れを構築した。特に、導入段階では、今後の学びのつながりを生徒に示すことのできる学習活動を中心に組み立てている。この工夫により、生徒が授業全体を通して学びのつながりを認識できるような流れとなっている。

第3章 授業実践

本章では、本研究で構築した授業の流れについて具体的に述べる。ここでは、授業実践で行なった活動や指示を単に提示するだけでなく、各場面を設ける意図を示し、授業設計の背景や教育的な狙いを明らかにする。このようにして、本研究の授業案をそのまま活用するだけでなく、授業スタイルや生徒の実態に応じて柔軟にアレンジできる授業案となると考えられる。

第1節では、授業実践を行う2つの学級の概要と授業実践におけるICT活用の意図について論じる。第2節から第5節にかけて、実践した授業の流れについて、その意図と実践結果を踏まえて説明する。特に、第3節における2授業目の「グラフを言葉だけで伝える活動」は、本研究の中心である「学びのつながり」を重視した学習活動として位置付けられる。また、第2節以降では、授業実践の過程において実際に見られた生徒の考えや言動にも着目し、授業の流れとともに述べる。教師による指示や活動については、四角枠内に記載し、その意図について後述している。四角枠を順に辿ることで、本研究で構築した授業に沿った流れとなる。また、授業実践での生徒の様子や発言については、四角枠内に「生徒」と記載している。

第1節 授業実践の概要

本研究では、高等学校数学Ⅱにおける微分の導入段階の授業を対象とし、熊本県内高等学校の研究協力校において、以下の2つのクラスで授業実践を行なった。

<理系Aクラス>		<文系Bクラス>	
実践日	令和6年9月11日～9月13日	実践日	令和6年10月7日～10月10日
授業数	計4授業(12日のみ2授業実施)	授業数	計4授業(1日1授業実施)
実践学級	第2学年 理系クラス(37名)	実践学級	第2学年 文系クラス(34名)
授業者	筆者	授業者	筆者

両クラスは、直前に「三角関数」の学習を終え、「微分・積分の考え」の内容についてはまだ触れていない段階で本授業実践を導入した。理系と文系で2クラスにおける授業進度の違いから、実施日に差が生じたが、基本的には同じ流れで授業を行なった。ただし、理系のAクラスでは数Ⅲへのつながりに触れ、BクラスではAクラスの実践結果を基に一部内容を改善した。

本研究では、ICTを手段として活用し、以下のような授業スタイルを意識的に取り入れた。ただし、本研究の目的はあくまでも学びのつながりを示すことであり、ICTの活用自体ではないという点に留意している。そのうえで、目的達成に有効と判断したためICT活用を取り入れた。

- ・ miro(オンラインホワイトボードツール³)を活用し、授業内容を黒板スクリーンに提示する
意図：学びのつながりを認識しやすくするために、既習の内容をいつでも振り返ることができるようにする。また、学習活動の流れや指示を事前に準備・提示することができ、生徒がボード上で視覚的に理解することができるため、活動を円滑に進めることができる。
- ・ 生徒がmiro上の付箋を用いて個人の考えを共有する
意図：付箋を活用することで、生徒個人の意見を学級全体に共有できるような環境を整え、複数の意

³ miroのオンラインホワイトボードツールとは、同じボード上をオンライン上で共有し、「コラボレーションのためのビジュアルワークスペース」である。学校では、オンライン上での協働学習や、板書を記録として残しつつ生徒の手元でも見ることができる支援として活用されている。miro. “オンラインホワイトボードツール”. Miro. 2025, <https://miro.com/ja/online-whiteboard/>, (参照 2024. 12. 10)

見を可視化できるようにする。また、miro 上に記録に残すことで、学習の振り返りを支援する。

- GeoGebra⁴を活用し、生徒自身が関数のグラフを作成・操作する

意図：生徒が自らグラフを作成し動かすことで、主体的に学習に取り組む機会を提供する。さらに、生徒の考えたグラフを基に授業を展開することで、学習へ意欲を高める。

研究協力校では、miro の活用を学校全体で推奨しており、生徒は日常的に miro を使用しているため、付箋の活用やオンラインボードの操作は円滑に行えた。一方、グラフ描画ツールである GeoGebra は、初めて扱う生徒が多かったため、使い方や式の作成手順について説明する時間を設けた。普段から使用する機会があれば、この時間を省略し、生徒の活動時間をさらに確保できると考えられる。

このような ICT を活用した授業スタイルのもと、次節以降では各授業の流れや具体的な授業実践の結果を、設計した意図も踏まえながら詳述する。

第2節 1 授業目 極限値の考え方と計算の応用

本研究における 1 授業目では、極限値について学習する。工夫点①(p.10 参照)のように、微分係数の定義までが途切れのない流れにするために、新しい考えである極限値を事前に学習することとした。はじめに、極限値の考え方を直感的にイメージできるように身近なクッキーを用いた視覚的な活動を通して、生徒に「半分にし続けると最終的にある値に限りなく近づく」ことを認識させる。このような「限りなく近づいたある値」が極限値であることを定義する。また、微分係数を求める途中式で出てくる形を発展問題として扱う。それにより、微分係数を学習する際に、一連の手順を理解しやすくすることを目指している。

本時の目標は、「極限値がどのようなものか説明できるようになる」として、極限値の意味を理解した上で、練習問題を解きながらペアに「極限値がどのようなものか説明する」ことができることを目指す。

1. 半分にし続けるとどうなるか考察する

高等学校数学Ⅱでは、極限値を「直感的に理解させるよう扱うもの」(文部科学省, 2018, p.64)としている。極限の考え方は、数学Ⅲで学ぶ高度な内容であるが、微分係数を定義するために数学Ⅱで部分的に扱われていると考えられる。ここでは、厳密な議論は必要ないものの、極限の概念を直感的に理解する基盤を形成することが重要であると考えられる。まず、アイスブレイクも兼ねて、次の流れで授業を導入する。

流れ 極限値の授業の導入

- ① この時間から、新しい単元の学習を行うことを確認する。
- ② ペアとのアイスブレイクとして、ペア同士でじゃんけんをして勝ち負けを決めさせる。
- ③ クラス全体で勝った方を確認し、教師とのじゃんけんを行う中で人数を絞り、クラスでの 1 位(代表者)を決める。
- ④ 賞品として「クッキー」のイラストの描いてあるプリント(A4 用紙)1 枚を、代表者に渡す。
- ⑤ 「1 人で食べるには大きすぎる」という口実で、代表者にプリントを半分に破るように指示する。
- ⑥ 「まだ大きい」という口実で、⑤で半分にしたプリントを、さらに半分に破るように指示する。

これは、生徒が取り組みやすい簡単な導入を通じて、新しい単元の学習を円滑に進めるために取り入れた流れである。構築した授業では、ペア同士での活動を含むため、事前にペアとのアイスブレイクを行うことも目指している。また、じゃんけんという気軽な活動から取り組むことで、どの生徒も参加しやすく

⁴ GeoGebra とは、「幾何学、代数学、表計算、グラフ作成、統計学、微積分を 1 つのエンジンにまとめた、あらゆるレベルの教育に対応する動的な数学ソフトウェア」である。学校では、学習教材として図形を視覚的に提示したり、関数の式からグラフを描いたりして活用されている。参考：GeoGebra.

“GeoGebra のツールと教材” . GeoGebra . 2025, <https://www.geogebra.org/?lang=ja>, (参照 2024. 12. 10)

なり、③のように自然な流れでクラスの代表者を決めることができる。代表者には「賞品としてクッキーを贈呈する」と伝え、鞆から「クッキー」のイラストの描いてあるプリントを取り出す。授業実践では、生成 AI を用いて作成した、A4 用紙全体にクッキーが描かれているプリントを使用した(本稿での提示は割愛する)。これは、生徒の身近な題材を用いて視覚的に提示することを目的としているため、イラスト自体に意味はなく、手書きやクッキー以外のものを用いても可能であると考え。その後、⑤のように、「大きい」という口実のもと、代表者にプリントを半分に破るように指示する。さらに、半分に破るように指示する。これを繰り返していく中で、次のような活動を行う。

活動 クッキー1枚を半分にし続けるとどうなるかについて考察

- ① クッキーのイラストが描かれたプリント1枚を、代表者が半分に破いていく。
- ② 破る作業を繰り返しながら、生徒は、プリントがどんどん小さくなっていく様子を観察する。



- ③ 途中で「この作業を続けると、代表者の手元のクッキーはどうなるか」と問いかける。
- ④ 生徒個人で考える時間を設け、考えを miro の付箋に記入させる。
- ⑤ 共有された付箋をスクリーンに提示し、全体で確認する。

この活動では、クッキーを半分にし続けることで最終的に「0に限りなく近づくが、完全に無くなるわけではない」という極限の考え方を視覚的に表現できる。これは初項1、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列における無限級数という数学Ⅲで学ぶ内容に関連する。ここでは、そこまで踏み込まず、極限という考え方をを用いると「ある値そのものになるのではなく、ある値に限りなく近づく」ことを生徒に実感させることを目的としている。以下は、2クラスの生徒が共有した付箋を集約した結果であり、()内は類似意見の個数を示している。

生徒 半分にし続けるとどうなるかに対する反応

- ・ 限りなく小さいクッキーが残る・存在する(9)
- ・ 何もない・何も残らない(8)
- ・ とても小さいクッキーになる(8)
- ・ クッキーのカスになる(5)
- ・ 粉・欠片になる(5)
- ・ 目に見えなくなる(3)
- ・ どこまでも小さくできる
- ・ 2のx乗分の1になる

この段階では、生徒の考えが大きく「小さいクッキーが残る」と「何も残らない」の2つに分けられることと全体で確認する。その際、生徒に「なぜそう考えたのか」を着目させ、生徒が自分の意見を深く思考できるよう促す。これにより、生徒は自らの考えを振り返りつつ、他者の視点に触れることで新たな気づきを得る。この活動を通して、生徒は「0に限りなく近づく」という数学的な表現を確認するとともに、「0自体にはならない」ことを、小さな細かいクッキーが残るというイメージから直感的に理解できるようになると考えられる。

活動①における直感的理解を基に、活動②では複数のクッキーを用いることで極限値の考え方をさらに深める。この活動では、3枚のクッキーのうち1枚のみを0に限りなく近づけることで、全体としての量がどのように変化するかを考察させる。

活動 クッキー3枚のうち1枚を半分にし続けるとどうなるかについて考察

- ① クッキーのイラストが描かれたプリント3枚を提示し、そのうち1枚を半分に破いていく。
- ② 破る作業を繰り返しながら、生徒は、プリントがどんどん小さくなっていく様子を観察する。



- ③ 破っていく1枚の大きさを x とすると、手に残る量は $2+x$ と表せることを確認し、「 $2+x$ の x を0に限りなく近づけると、どうなるか」を問いかけ、生徒に考察させる。
- ④ 各自で考える時間を設け、ペアとの対話を行った後、全体で共有する。

この活動により、極限値の「一定の値に限りなく近づく」という特徴に気づかせる。この過程を通じて、生徒に極限値の考え方を単なる抽象的な議論だけを説明するのではなく、具体的な現象から理解させることができる。「 $2+x$ の x を0に限りなく近づけると、 $2+x$ は2に限りなく近づく」ことを確認する中で、最終的な値としては x に2を代入したものと変わらないが、2に限りなく近い値になるという意味を踏まえて確認する。ここで、次のように表すことを確認する。

指示 極限値の用語を確認する

「 $2+x$ の x を0に限りなく近づけると、 $2+x$ は2に限りなく近づく」ことを、新たに「 $2+x$ の x を0に限りなく近づけると、 $2+x$ の極限値は2である」と表す

これは、日常的な事象を数学化する際に、極限値という新出の用語を確認するために行っている。このことから、極限値について定義する。活動①②を通して「一定の値に限りなく近づく」という極限値の考え方を体験的に理解することで、生徒が数学Ⅱで学ぶ極限値により親しみやすくなる。この活動を踏まえて、次のように極限値を定義する。

定義 極限値

関数 $f(x)$ において、 x が a と異なる値をとりながら、 a に限りなく近づくとき、 $f(x)$ の値が一定の値 α に近づくならば、その α を関数 $f(x)$ の極限値という。

また、記号 $\lim$ を用いて次のよう表す
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

ここでは、定義そのものの意味を確認するためにクッキーを半分にしていくイメージを用いて解説を行うが、記号 $\lim$ を用いた表した式を覚えるべき公式のように扱わない。これは、この単元では後に学ぶ平均変化率や微分係数など、文字を用いた定義が他にも登場するため、記号の操作そのものに重点を置くのではなく、定義の意味を生徒に理解させることが重要であるからである。さらに、「0とは異なる値をとりながら、0に限りなく近づける」という考え方を、3授業目での活動の際に生徒自身でつなぐに気づき、既習の学びを活用できることを目指している。3授業目では、ICTを用いて平均変化率を生徒自身で自由に変化させる活動を通して、2点の傾きを表す直線が消える瞬間に着目する。その原因と対処法を考察する中で、「平均変化率の h を0にすることができないならば、 h を0に限りなく近づける極限値の考え方が使えるのではないか」という気づきを生徒から導き出すことで、その「平均変化率の極限値」を微分係数と定義するという流れで扱うことができる。そのため、ここでは、「極限値の問題が解ける」ことを目的とせず、「極限値とはどのようなものであるか」を理解することを目的としている。

2. 極限値の意味について対話を交えた練習

極限値の定義を確認した後に、どのように計算するかについて練習問題を通じて理解を深める。その際、単に値を代入して求めるのではなく、極限値の意味に着目しながら解くことを目指す。この目的のために、ペアで対話する時間を設け、生徒同士で考えを共有しながら極限値の考え方に慣れる場を設ける。次に示す(1)～(8)の問題を段階的に扱い、計算練習を通じて極限値について理解できるような構成にしている。

練習問題 次の極限値を求めよ。

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| (1) $\lim_{x \rightarrow 0} x$ | (2) $\lim_{x \rightarrow 1} 3x$ | (3) $\lim_{h \rightarrow 3} 2h$ |
| (4) $\lim_{h \rightarrow 1} (3h + 1)$ | (5) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1)$ | (6) $\lim_{h \rightarrow 0} (3 + 3h + h^2)$ |
| (7) $\lim_{h \rightarrow 0} (3a + h)$ | (8) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(4+h)}{h}$ | |

解答

- (1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 4
(5) 5 (6) 3 (7) 3a (8) 4

これらの問題の出題意図については次の通りである。

- (1) 基本的な形として、 x が0に限りなく近づくときの x の極限値を考えさせる。この値としては0になるが、これは0そのものではなく、0に限りなく近い値であることを確認させることが目的である。
- (2) $f(x)$ が係数を含んだ場合でも同様に考えることができることを確認させる。
- (3) $f(x)$ を考えてきたが $f(h)$ のように着目する文字が変わっても、考え方は変わらないことを確認させる。文字で表現した定義のみの理解では、着目する文字の変化によるギャップを感じやすい生徒がいる可能性があるため、それを解消する目的がある。
- (4) 定数項が追加されても変数を含む部分のみが変化することを確認させる。
- (5) x^2 がついた場合でも、同様に考えることができることを確認させる。
- (6) 項が増えた場合でも、同様に考えることができることを確認させる。
- (7) 文字が a と h の2つになった場合でも、着目する文字が h であることを記号からの確に読み取ることが大切であることと、定数 a は変化せずに値として a が残ることを確認させる。
- (8) 分母と分子に同じ変数 h があることから、単にそのまま $h = 0$ を代入すると $\frac{0}{0}$ という数学Ⅲで詳

しく学習する不定形となってしまうことを確認させる。この場合は、分母と分子の h を約分し、残った $(4 + h)$ の h を限りなく0に近づけて求めることを確認させる。数学Ⅱの段階で学習するこれらの問題は、極限値そのものの応用への学習ではなく、微分係数を定義する際に必要となる事前知識としての学習として位置付けられている。そのため、不定形などの形は深く扱わず、その後の学習につながるように極限値の意味に着目して理解させる。

単なる計算練習でとどまらず、極限値の意味についてペアと対話を通して、様々な場合でも同様に考えることができることを確認する。

3. 「微分係数」で出てくる形の発展問題

練習問題の(1)～(8)をもとに、次の(9)を発展問題として出題する。

発展問題 次の極限値を求めよ。

(9) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$

解答 (9) 6

この問題は、後に学習する「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数」を求める計算の際に出てくる途中式の形である。計算の手順としては、分子を展開して出てくる $9 + 6h + h^2 - 9$ を整理し、共通因数の h でくくると $h(6 + h)$ と整理した結果、与式は $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h}$ となる。これは(8)と類似な形となり、分母と分子を約分することで極限值として6を求めることができる。もとの(9)の形のままではすぐに極限值を求められないため、「分子の展開→共通因数でくくる→約分」という一連の手順を理解する必要がある。ただし、この一連の手順は、はじめて学習する生徒にとっては唐突な計算に感じられる場合があり、微分係数を求める計算が難しいと感じる要因となる恐れがある。予想される授業の流れでは、微分係数を求める際に、教師からこの一連の手順を確認するための時間を設ける必要があると考えられる。それにより、微分係数の意味よりも「微分係数を求める」ことに重点を置き、計算方法を中心に指導するような形式的な授業になる可能性がある。本研究では、微分係数の意味を理解させることに重きを置いている。そのため、(9)の形の問題を極限値の発展問題として位置付け、事前に練習として扱うことで、微分係数を学習する際に、一連の手順を理解しやすくすることを目指している。このような事前の練習を通じて、極限値の考え方を定着させると同時に、後の微分係数の定義における計算手順を円滑に扱うことが可能になる。生徒には、この形が出てくることは伝えないが、極限値の考え方が今後の授業で重要になってくることについては伝える。手段として使えるように、事前に極限値を学習したことを確認し、次の学習活動について予告と事前説明を行う。

4. 次回の学習活動の予告・事前説明

2 授業目では、生徒自身でグラフを作成し、そのグラフを言葉だけで伝える活動を通して、グラフのどのような特徴に着目すべきかを考察する。生徒には、グラフを言葉だけで伝える活動のことは伝えず、GeoGebra というグラフ描画ツールを用いて、自由にお気に入りのグラフを作成してもらうことと、その使用方法について本授業の終わりに説明しておく。事前に説明しておくことで、2 授業目における生徒の自由な時間を十分に設けられる。普段から GeoGebra を生徒が使用している場合はこの時間を短縮することができる。次の流れで、次回の予告について生徒に伝える。

流れ 次回の予告と事前説明

- ① 次回の授業では、各自で「お気に入りのグラフ」を自由に作成する活動を行うことを伝える。
- ② グラフ作成の際に使用する、関数を入力するだけで瞬時にグラフを描画できる便利なツール「GeoGebra」を紹介する。
- ③ GeoGebra を使うことで、今まで学んだ関数を自由に組み合わせることができ、見たことのない関数のグラフを描くことができること確認する(実際に関数を入力して、生徒にグラフの様子をみせる)。
- ④ 自分の手でグラフを描くことと、今回の ICT 使用では目的が異なることを確認する。手でグラフを描くことは、グラフの特徴を理解し、思考をもとに表現することを目的としている。一方、ICT はどんな関数のグラフの形も即座に作成し確認する手段として優れている。ただ「お気に入りのグラフ」の形を見つけることが目的である今回の活動においては、ICT の活用が適している。ICT があるからといって数学的な思考を省いて良いわけではないことに注意させる。

このような内容を伝える意図は、次の通りである。

- ① 事前に次回の学習活動の一部について触れることで、生徒が活動の流れを自然と理解し、円滑に取り組めるように準備を整える。ただし、学習活動の中心となる「グラフを言葉だけで伝える活動」については具体的に伝えない。「お気に入りのグラフの作成し、そのグラフを言葉だけで伝える活動を行う」という2つの指示を同時に行うのではなく、まずは「お気に入りのグラフを作成」という1つの活動に集中させる段階的な指示を行う。このように段階を分けることで、生徒が各活動に自然と取り組

みやすくなるように配慮する。特に1授業目では、制限を設けず自由に関数を入力させて、入力した関数の式から即座にグラフが作成されることを実感させる。

- ② ICTを活用することで関数を入力すると瞬時にグラフを描画できることについて触れ、今回使用するGeoGebraを紹介する。
- ③ 実際に、生徒に式からグラフの形を想像できない関数のグラフをみせることで、ICTの有用性を実感させる。授業実践では、 $y = x + 3 \sin 2x - 2 \cos 5x$ を例として提示した。また、係数や値が変化するとそれに伴ってグラフが変更する様子を実演してみせる。授業実践では、 $y = 3x + 2 \sin 2x - 2 \cos 5x$ と $y = x^2 + 2 \sin 2x - 2 \cos 5x$ のように変更したものを提示した。これにより、どのような関数の式でも即座にグラフを作成することができるICTの利便性を視覚的に示すことができる。その際、作成されたグラフがなぜその形になるか、生徒自身でも考えることが可能であることを確認する。($y = x + 3 \sin 2x - 2 \cos 5x$ においては、 $y = x$ の傾き1の直線のグラフと三角関数の周期性のあるグラフの組み合わせられているため、周期性を持つ右上がりのグラフになると読み取ることが可能であることを確認した。)このように、教師が実際に関数を入力してみせることで、生徒の興味を引き出し、学習への意欲を高めることができる。
- ④ ICTを用いてグラフを作成する活動を行うことで、生徒が「ICTがあるなら、自分の手でグラフを描く必要はない」と感じてしまう可能性があると考えられる。この点については慎重に指導する必要がある。微分の学習を進める中で、微分を用いて増減表を作成し、それを基にグラフを描くことが重要な学習内容として扱われる。これは、関数の増減や極値といった数学的な特徴を、生徒自らの手で思考し整理することが求められる。一方、ICTを活用すれば増減表を作成せずともグラフが即座に表示できるため、生徒が「微分の計算や思考を省いても良い」と誤解してしまう恐れがある。しかし、数学的な学習において重要なのは、結果として得られるグラフそのものではなく、その背景にある思考プロセスである。この思考の経験の積み重ねが、生徒の数学的な理解を深め、主体的に学習に取り組む態度を養うきっかけとなると考えられる。そのため、今回の活動においてICTを活用するのは、グラフを素早く可視化して自由にグラフを作成するための手段であることを明確に伝えるべきである。同時に、ICTの便利さに依存することなく、グラフを手で描く活動が持つ意義や重要性を強調することが求められると考える。

次の図3はGeoGebraの使用の際の関数を入力する手順として、miro上に提示したものである。

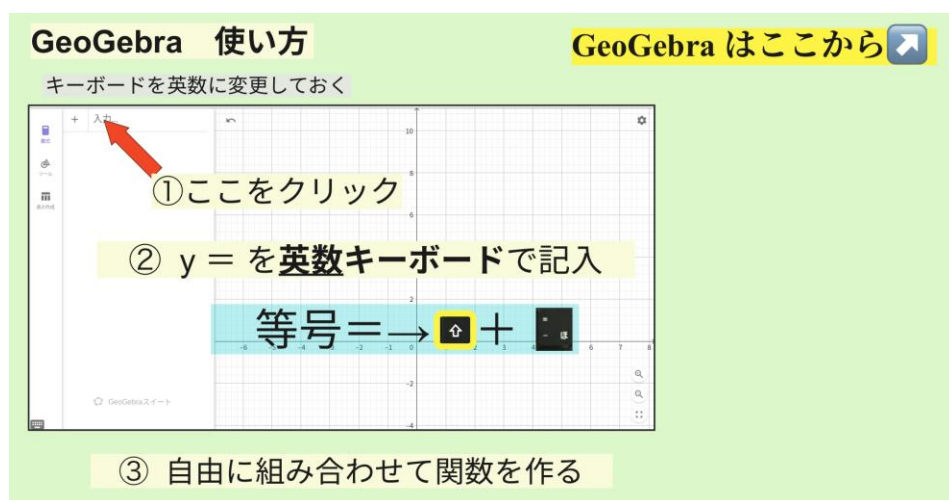


図3 miro上に提示した「関数を入力する手順」を示した画像

miro では URL を用いてリンクするができ、それを押すとリンク先に飛ぶことができる機能⁵がある。授業実践では、「GeoGebra はここから」の図形に、学習活動で使用する GeoGebra の Classroom⁶の URL をリンクしている。授業実践では、図 3 の画面のような、事前に教師から手を加えていないページで、各生徒の活動を行った。生徒には次のような指示を行い、GeoGebra でお気に入りのグラフを作成させる。

指示 GeoGebra でお気に入りのグラフを作成する

- ・ miro 上の「GeoGebra はここから」をクリックし、移動すること。
- ・ キーボードを半角英数に変更して、入力すること。

同一の Classroom 上で生徒に活動させることで、教師は各生徒の活動状況や作成したグラフを見ることができる。GeoGebra で関数を入力する方法としては、キーボードと画面上のボタンでの入力がある。授業実践では、どちらの使用も可能とした上で、キーボードでの入力の仕方について説明を掲載した。ただし、キーボードで入力する際は、英数の状態でのみ認識されるため、英数で入力することを全体で注意する。等号や四則演算、分数、指数などの入力方法として、次の図 4 を提示する。



図 4 miro 上に提示した「四則演算と他の関数の入力の仕方」を示した画像

口頭での説明やその場でキーボードの指差し確認だけでは、生徒にとって分かりにくかったり、内容を忘れてしまったりする可能性がある。そのため、事前に miro 上に図 4 のような資料を提示しておくことで、生徒がいつでも見返せるように工夫した。図 4 については、生徒自身で試行錯誤してお気に入りを見つける機会を設けるため、口頭での説明を省略し、提示を見せるだけでとどめた。その上で、必要があれば質問するように生徒に指示をする。また、1 授業目では、生徒が入力する関数やグラフの形について特に制限を設けず、自由に各自でグラフを作成させる。また、生徒同士の対話を推奨し、互いにどのようなグラフを作成したかを見せ合う時間を設ける。これにより、生徒は自分 1 人では思いつかなかったような関数の式や興味深いグラフの形に触れることで、さらに意欲を高めることができる。さらに、クラス内で、特に参考となるようなグラフを作成した生徒がいた場合は、その作品をスクリーンに投影し、クラス全体

⁵ miro では、内部や外部へとリンクを通じて移動することができる。授業実践では、GeoGebra の Classroom をリンクし、生徒が miro から GeoGebra へと簡単に移動できるように使用した。活用方法は以下の URL に詳しく掲載されている。参考：miro. “内部と外部のリンク”. Miro, <https://help.miro.com/hc/ja/articles/360017572354-内部と外部のリンク>, (参照 2024. 12. 10)

⁶ GeoGebra の Classroom では、事前に GeoGebra で作成したものを、各生徒に割り当てて配布することができる。各生徒は個人のページで活動することができる。活用方法は、以下の URL に詳しく掲載されている。参考：GeoGebra. “GeoGebra Classroom を学ぶ”. GeoGebra. 2025, <https://www.geogebra.org/m/y32vewsk>, (参照 2024. 12. 10)

で共有する。このような例示は、生徒たちが新たな発想を得るきっかけとなり、クラス全体の学習意欲を刺激すると考えられる。次回の授業では、お気に入りのグラフを1つ決定し、そこから学習内容を深めていくことを伝え、1授業目を終了する。授業実践の終了後には、生徒たちが試行錯誤を続けてグラフを作成したり、パソコンを持ち寄って互いに見せ合ったりする姿が見られた。

第3節 2 授業目 グラフの形を言葉だけで伝える活動

本時では「グラフの形を言葉だけで伝える学習活動」を通じて、生徒がグラフのどのような特徴に着目する必要があるかを考え、その後の学習内容につながる重要な気づきを引き出すことを目的としている。この活動では、生徒がグラフを言葉だけで伝える中で、形状や特徴を正確に伝えることの難しさを体験できる。その結果、グラフの特徴を数値的な数値で表現する必要性を認識させ、微分の学習内容と自然とつながるようにする。

本時の目標は、「よりの確にグラフの形を伝えるために、どのような特徴に着目するかを考察する」として、生徒が言葉だけで伝えることの難しさに気づき、それを対処するためにどのような特徴を取り上げ、どのように伝えるのが効果的かを考察することを目指す。

1. 関数について復習

お気に入りのグラフを各自で作成する前に、まず関数の定義の復習を行い、今回の活動で作成する関数に関する約束を共有する。これは、生徒が作成するグラフが関数として適切であることを確認するとともに、グラフが複雑すぎないように事前に制限を設けるためのものである。まず、関数の定義の復習に入る前に、次のような問いかけを行い、生徒に miro の付箋に記入させる。

問いかけ

これまでどのような関数を学習したか思い出して、miro の付箋で共有してみよう

以下は、その問いかけに対する生徒の考えを、miro の付箋を用いて集計したものである。

生徒 これまで学習した関数についての反応

比例、反比例、一次関数、二次関数、三次関数、 n 次関数、三角関数($\sin$, $\cos$, $\tan$)、指数関数、対数関数、偶関数、奇関数 (ゼータ関数、SUM 関数、ラウンド関数)

生徒から出された関数については、次のように一般的な式の形で表せることを確認する。ただし、() 内に示す内容は教科書に記載の無いものを含むため、関数の定義を確認した後に取り上げるものとする。

板書 共有された関数の一般的な式

比例 $y = ax$, 反比例 $y = \frac{a}{x}$, 一次関数 $y = ax + b$, 二次関数 $y = ax^2 + bx + c$, 三角関数 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, 指数関数 $y = a^x$, 対数関数 $y = \log_a x$

これまで学習した関数の式を振り返る時間を設けることで、関数の定義における「 x の値と y の値の対応」と「 $y = f(x)$ 」の形で表されていることを視覚的な法則から確認できる。これを踏まえて、次の関数の定義を確認する。

定義 関数

2つの数量 x, y について、 x の値を定めると、それに対応して y の値がただ1つに決まる

関数は1つの x の値に対応して1つの y の値が決まるものであるため、円の方程式($x^2 + y^2 = 1$)のような1つの x の値に対応して複数の y の値が決まるようなものは関数ではないことをここで確認する。また、必要に応じて、ゼータ関数やSUM関数、ラウンド関数は、1対1対応があるため関数といえることも確認する。微分の学習においては「関数 $f(x)$ を微分する」ため、関数ではないグラフは作成しないように注意す

る必要がある。ここで、自由にグラフを作成する上での注意点として、次の5つの制限を示す。この制限を設ける理由も生徒に共有する。これにより、制限の必要性を明確にでき、全生徒が次の活動に適切に進めることができるようになる。

指示 自由にグラフを作成する上での注意点

- ① 「 $y =$ の形」「右辺にある変数は x のみ」を満たす式であること
→活動に適したグラフを作成し、次の活動に参加できるようにするため
- ② グラフは、なるべく細かすぎないこと
→細かすぎると、次の活動で自分自身がかなり大変になる
- ③ グラフは、なるべく原点周りで収まること
→基準となる原点を統一するため
- ④ 係数や指数は一気に大きな値を入力しないこと
→パソコンの処理が追いつかず、故障の原因になる(小さい値で試して、少しずつ大きくする)
- ⑤ 作成しているグラフは、絶対にペアには見せないこと
→見せてしまうと、次の活動の醍醐味が失われる(席が前後の人とは話しても良い)

また、②③④の注意すべきグラフの具体的な例として、次の図5を提示する。「なるべく」という表現が曖昧であるため、極端な形のグラフの具体例を提示することで、視覚的に理解させる。「なるべく」のような表現を用いることは「自由にグラフを作成する」と相反するものであるが、「これ以上は禁止」という明確な基準を定めることができないため、「なるべく」という表現を用いている。必要に応じて机間巡視の際に指示を行う。

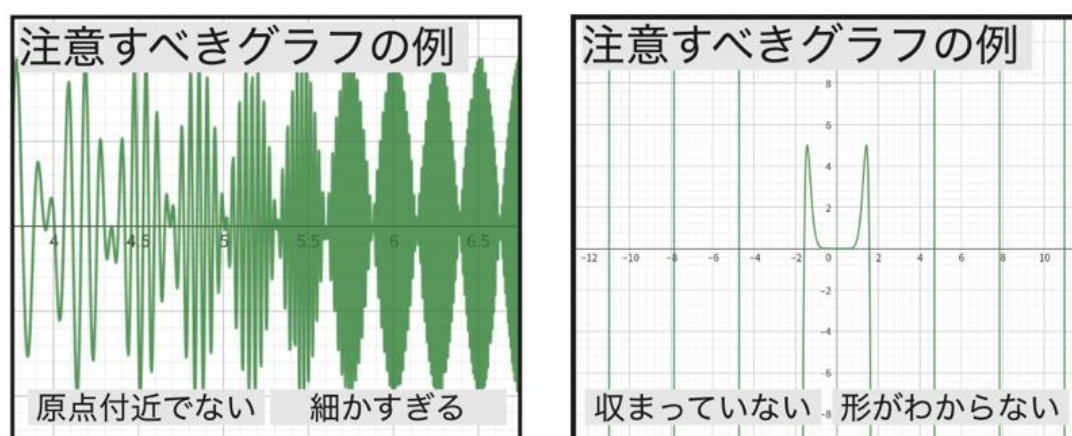


図5 miro上に提示した「注意すべきグラフの例」の画像

5つの制限は全て、生徒が活動に適したグラフを作成し、学習活動に取り組めるようにするものである。自由だからといって活動の趣旨に沿わないグラフを作成すると、当人だけでなく、そのペアも活動に参加できなくなる可能性がある。この制限を示すことで、生徒が活動の意図を理解し、自律的に取り組むことができる。それぞれを制限する意図は次の通りである。

- ① 微分の学習では関数を扱うため、作成する式が一般的な関数の特徴を満たすよう、「 $y =$ の形」「右辺にある変数は x のみ」という制限を設ける。「 $y =$ の形」という指示がない場合、 $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5$ や $3y - 2x = 3y + x$ のように統一できなくなってしまう可能性がある。前者は円の方方程式でそもそも関数として扱えない。また、後者のように $3y - 2x = 3y + x$ では、生徒が $x = 0$ と同値であることに気づかず、時間をかけすぎたり、混乱したりする可能性がある。「 $y =$ の形」と左辺を限定することで、生徒は右辺を考えるだけになり、時間短縮と活動の本質に重きを置くことができる。「右辺にあ

る変数は x のみ」という指示がない場合、 $y = xy + y^2$ や $y = 3x^t + 2t$ のように関数ではないものができたり、媒介変数表示でパラメータが必要となり、 y の値が明確に定まらなかったりする可能性がある。左辺に y があり、右辺にある変数は x のみの式であれば、基本的に「 x の値を定めると、それに対応して y の値がただ1つに決まる」ことになり、その式は関数の式として適切になることがほとんどである。ただし、必要に応じて、指導する可能性がある。

- ② 次の活動として、ペアにグラフを言葉だけで伝える際に、図5のように細かいグラフを作成した場合、生徒自身が的確に伝えることが難しくなる。その細かさを伝えることに時間や労力を費やすことは、今回の学習活動の趣旨に適さない。机間巡視の際には、細かすぎるグラフを作成した生徒に対して「このグラフがどんなグラフか表現するの難しそう」と声をかけ、グラフの簡略化を促し、係数や指数の値を小さくするように指導する。これにより、生徒はグラフの特徴を適切に伝えることのできるグラフの作成に集中でき、学習活動の目的に沿った取り組みが可能になる。
- ③ ペアからグラフを言葉だけで伝えられた際、描く側の生徒は、配布するプリント(付録1参照)の原点を中心とした座標平面上に伝えられるグラフを描くことになる。そのため、原点付近にグラフが存在せず、「(100,200)を通る」といった極端な座標を伝えられても具体的に座標を記すことが難しくなる可能性がある。また、最大値・最小値や極値といった特徴的な座標を生徒が明確に取り入れることができるようにするために、原点付近に収まるようなグラフになるよう促す。配布するプリントに原点を中心とした座標平面をあらかじめ載せている理由は、GeoGebraの特性に起因する。GeoGebraはグラフの拡大縮小や移動が自由に行えるため、伝える側がどの部分を切り抜いて伝えるのか、グラフを描く側がどこを基準とするか、といった食い違いが発生する恐れがある。この食い違いから生じる話し合いも今回の活動の趣旨とは適さない。これを防ぐために、基準となる原点をあらかじめ指定しておくことで、グラフの存在する位置や形が、縮尺を除いて一致するように統一することができる。この制限により、生徒はグラフの位置や形に着目して共有できる環境を得られ、学習活動の円滑な進行が期待される。
- ④ $y = 500x^3 + 200x^2 - 600x$ や $y = \sin x^{100}$ のように係数や指数が大きい場合でも、GeoGebraはそれを即座に表示しようとするため、パソコンの動作が重くなることがある。ある程度までは対応可能だが、場合によってはサイトが落ち、故障の原因につながる恐れもある。そのため、生徒には、一気に大きな値を入力するのではなく、 $y = 5x^3 + 2x^2 - 6x$ や $y = \sin x^2$ のように小さな値から試して、徐々に大きな値を入力するように促す。この方法を取ることで、システムへの負荷を軽減するとともに、グラフの変化を段階的に観察する学びの機会を提供できる。一気に大きな値を入力してしまうと、図5のような極端なグラフが得られるだけで、その特徴を的確に読み取ることが難しくなる。これでは、今回の学習活動の趣旨に適さないことになる。
- ⑤ 次の活動として「グラフの形は見せずに言葉だけで伝える活動」を行うため、ペアに事前にグラフを見せてしまうと、この活動での醍醐味が激減してしまう。これを防ぐために、「ペアには見せない」という制限を設けている。ただし、個人で考えることが難しい場合には、席の前後の人と話し合うことを許可する。このようにすることで、生徒が互いに共有しながらも、活動の趣旨を損なわずに取り組める環境を提供できる。

以上のような制限のもと、各自でGeoGebraを用いてお気に入りのグラフを作成する時間を次に設ける。

2. GeoGebraを用いたお気に入りのグラフ作成

5つの注意点を確認した上で、各自でお気に入りのグラフを作成する時間を設ける。次の図6、図7は、2クラスの授業実践において、実際に生徒が作成したグラフを関数の式とともに示す。ただし、この学習活動では、関数の式自体ではなく、作成したグラフの形に着目するものである。

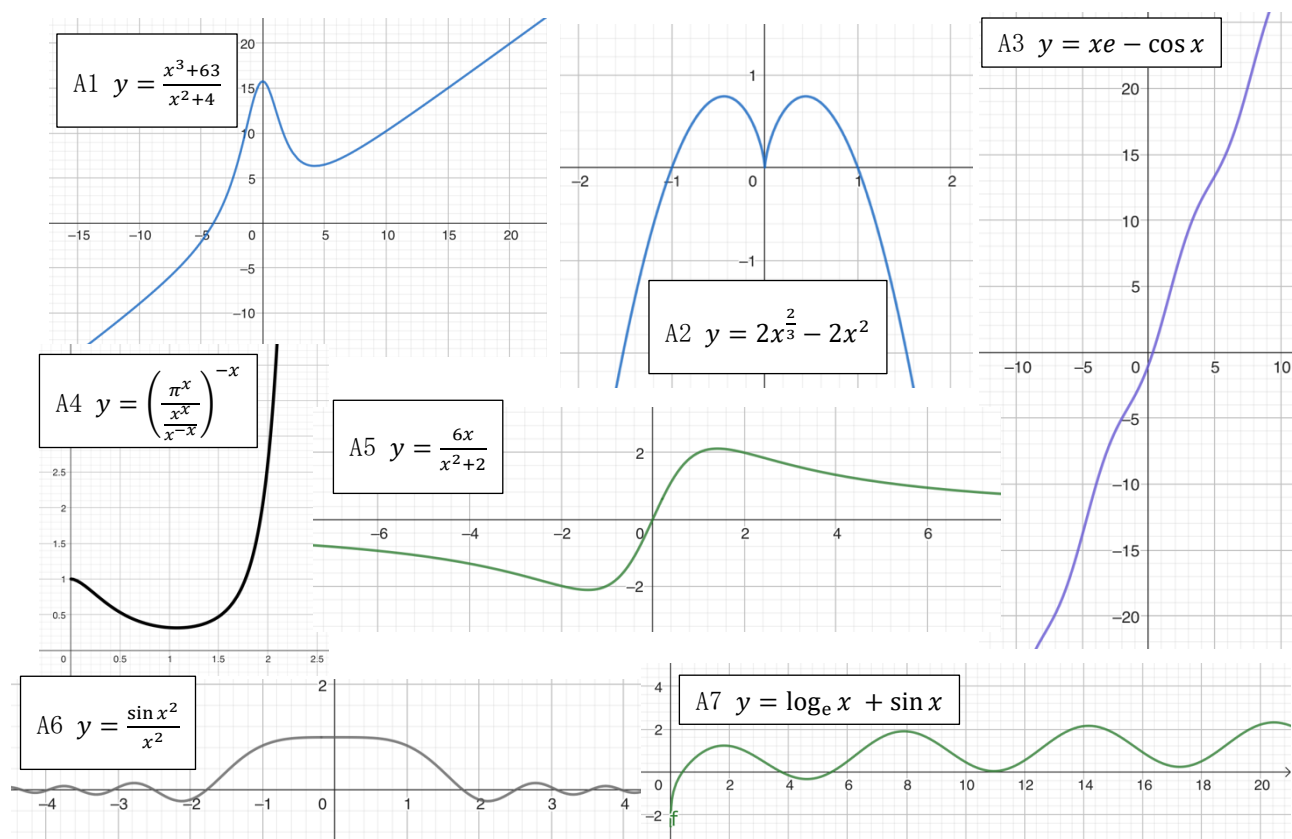


図6 理系Aクラスの生徒が作成したグラフ(以降, A1~A7 と呼ぶ)

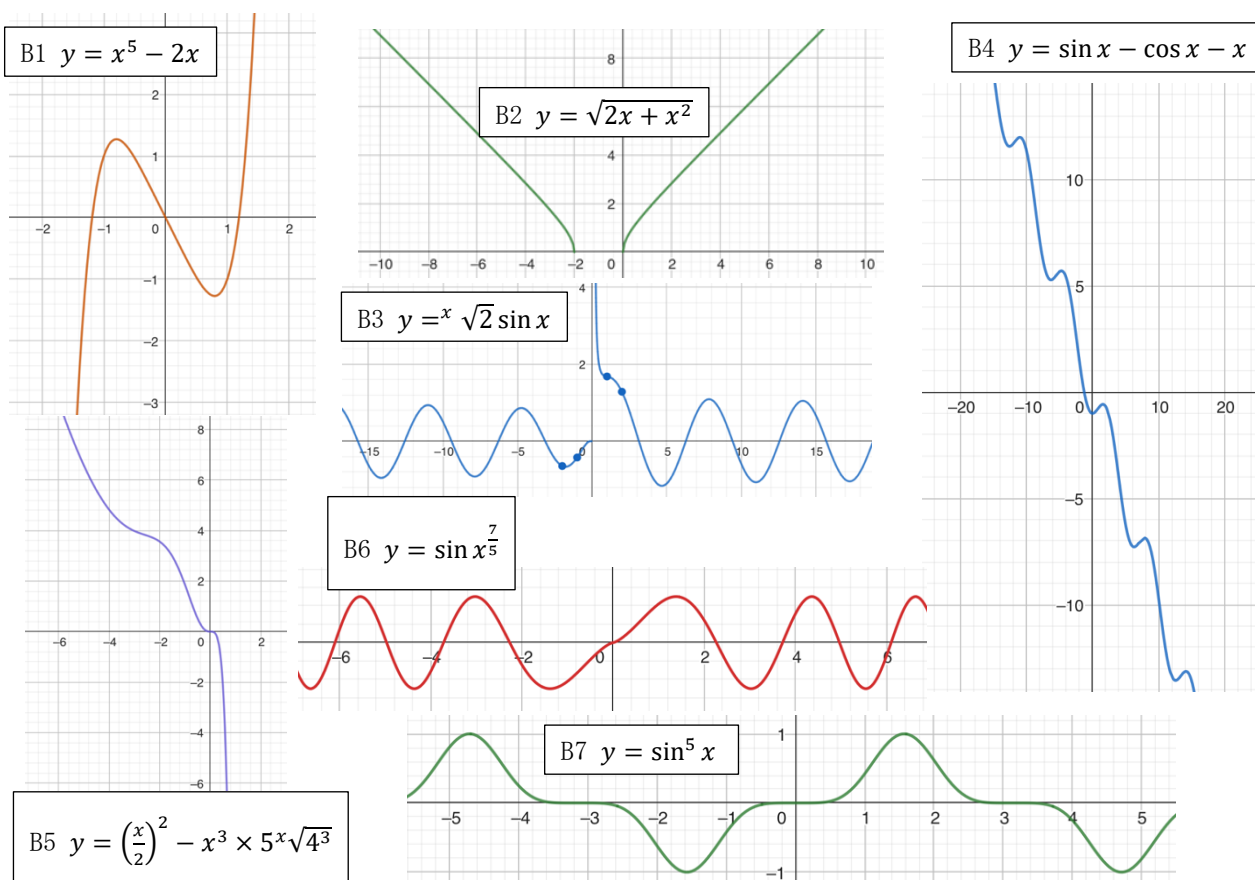


図7 文系Bクラスの生徒が作成したグラフ(以降, B1~B7 と呼ぶ)

生徒は、既習の関数を組み合わせて自由なグラフを作成するため、直近で学習した三角関数を用いたグラフが多く見られた。ただ生徒が作成したどのグラフも、これまでに学習した関数のような単調的な増減や単一的な変化のあるグラフではなく、多種多様な形のグラフが見られた。

ただし、机間巡視する中で、特に気になったグラフを作成した生徒に対しては、次のような指導・助言を行った。1つ目は、作成時に注意点の①(p. 21 参照)を守らず、楕円の方程式(例： $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$)のような式を用いてグラフを作成した生徒である。注意点を十分に守れていない生徒がいたため、改めて5つの注意点について全体で共有した。この全体での確認は、同様な失敗を生じないようにするための対応である。その生徒には、作成した式は「 x の値を定めると、それに対応して y の値がただ1つに決まるのか」を問いかけ、生徒自身で関数ではないことを確認させた。さらに、生徒の考えた式を単に否定するのではなく、生徒の試行錯誤を学びに生かすために、数学Cで学習する2次曲線の楕円の方程式ということを端的に伝え、「今回はその式を y について解き『 $y =$ の形』にすれば関数として認めることができる」ことをその場で伝えた。実際に、生徒自身で作成した式を方程式として y について解くことで、新しく関数(例： $y = \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$)⁷を導き出しグラフを作成していた。2つ目は、A4やB2、B3(p. 23 参照)のようにグラフが一部で途切れているグラフを作成した生徒である。その生徒には、「なぜグラフの一部が途切れるのか」という質問を行なった。生徒自身で考えさせ、 x の定義域の存在に気づかせることで、式とグラフの学びを深めることができる。具体的には、B2の $y = \sqrt{2x+x^2}$ において、根号の中は0以上である必要があるため $2x+x^2 \geq 0$ となり、この2次不等式を解くと、 $x \leq -2, 0 \leq x$ という範囲が求められる。したがって、 $y = \sqrt{2x+x^2}$ の定義域は $x \leq -2, 0 \leq x$ であり、 $-2 < x < 0$ には $y = \sqrt{2x+x^2}$ を満たす x が存在しないため一部だけ途切れたグラフとなるとわかる。単に自由に関数を入力してグラフを作成するだけでなく、生徒にそのグラフの形になる理由について考えさせることが重要である。これにより、生徒は関数の式とグラフの形の関係について実感することができる。単なる値を変える作業の繰り返しではなく、関数の本質を理解できるように指導する必要がある。3つ目は、A3(p. 23 参照)のような緩やかな変化をするグラフを作成した生徒である。A3を作成した生徒は、初めの段階では $-2 \leq x \leq 2$ のように狭い範囲でグラフを確認していたため、ほとんど直線のような形として認識していた。しかし、グラフを縮小させ、より広い範囲でグラフを確認するよう促したところ、A3のように緩やかに変化している様子が明らかになった。この関数の式には三角関数が含まれており、周期性のある変化があるのは明らかだが、狭い範囲ではその変化が見られず、生徒には直線に見えてしまっていた。この現象は、どんな曲線でも限りなく狭い範囲では直線のように見なすことができることを表している。この考え方は、曲線の任意の点における接線の傾きを求める際に重要となる微分係数の根本的な考え方に通じるものである。その生徒は、自ら「曲線であっても狭い範囲においては曲線に見える」という体験をしていた。したがって、この気づきの重要性を生徒に伝えた。これは、ICTを用いたからこそ得られた貴重な経験である。手で描いてグラフを作成する場合では、短時間で狭い範囲と広い範囲を切り替えることは難しい。しかし、ICTを活用することで、簡単に拡大・縮小が可能となり、関数の全体的な形と局所的な部分の両方について考えることができるようになる。自由に関数を入力するだけでグラフを作成できるGeoGebraだからこそ、関数を式とグラフの両方の視点から深く考察することができる。

⁷ この関数は、焦点が $(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$ 、長軸の長さ18、短軸の長さ8の楕円における $y \geq 0$ の部分を表す関数である。実際は、 $y = \pm \frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}$ となり $y < 0$ の部分も存在するが、今回はそこまで言及せず、楕円の上の部分を表す関数になることを生徒に伝えた。

単に関数を入力してグラフを作成することだけを目的とするのではなく、「なぜそのような形になるのか」「全体的な形や局所的な特徴はどのようなになっているのか」といった問いを通じて、生徒の学びをさらに深めることが重要である。また、ICT の利便性を活用し、試行錯誤を繰り返しながらグラフの特徴を考察することで、生徒の主体的に学習に取り組む態度を養う機会を提供できることが期待できる。

3. ペアでグラフを言葉だけで伝える活動

作成した各自のお気に入りのグラフを用いて、学習活動について次のように確認する。

流れ 学習活動に取り組ませる準備

- ① 作成したお気に入りのグラフを、言葉だけでペアに伝える活動を確認することを確認する。
- ② 「複雑すぎない」「ペアには絶対に見せない」という制限を設けた意図を伝える。
- ③ 学習活動の内容を踏まえて、作成したグラフの一部変更・修正する時間を設ける。

この学習活動は、「お気に入りのグラフを言葉だけで伝える際に、的確にグラフを伝えるためにはどのような特徴に着目する必要があるか考察する中で、数学的な値で表現することの必要性に気づく」ことを目的としている。それを踏まえて、次の図8をmiro上に提示し、活動の流れについての指示を行う。

【活動の流れ】

机をペアで向かい合わせにしてください。

① 「伝える人A」「描く人B」を決める

	伝える人 A	描く人 B
② 30秒	伝える準備	描く準備
③ 90秒	言葉だけで伝える (描くのは見ない)	聞いた情報をメモ グラフを描く (2分で終わり) (質問は無し)
④ 30秒	終わるまで待つ (助言は無し)	

- ⑤ 役割を交代する
- ⑥ ②～④を再度行う
- ⑦ 答え合わせ・正解グラフの共有
- ⑧ 結果とメモをもとに、話し合い

注意点

1. 伝える人は言葉だけ
2. 描いているのは見ない
3. 質問はしない
4. 対戦ではなく協力

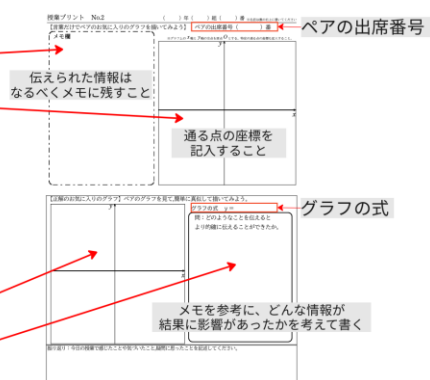


図8 miro上に提示した「言葉だけでグラフを伝える活動の流れ」の画像

図8は、事前にmiro上に提示しておくことで、生徒が各自の画面を見ながら説明を聞くことができ、理解しやすくなっている。活動中は、教師がスクリーンに提示することで、生徒が必要に応じて活動の流れをいつでも確認できるようにする。このように、事前に準備した資料を模造紙やプリントとして余分に配布することなく、生徒がいつでも確認することができる点がICTを活用する利点の1つであると言える。また、図8の右下のように生徒に配布するプリント(付録1参照)とともに、記入する位置を提示することで、生徒は口頭での説明よりも理解しやすくなり、活動を円滑に進めることができる。この画像を提示し、活動の流れを確認する。以下は、このような学習活動の流れを構築した意図である。

まず、ペア同士で机を向かい合う形にすることで、パソコンの背面同士が向き合い、GeoGebraで作成したグラフがお互いに見えないかつ対話がしやすい環境を整える。伝える際は、自分の画面を見ながら相

手に情報を伝え、描く側は手元のプリントにグラフを描く形式で活動を進めることができる。

- ① ペアで「伝える人 A」と「描く人 B」という役割を決める。後に役割を交代して再び同じ流れで活動を行うため、最初にどちらの役割を担うのかという違いのみである。
- ② 実際に言葉で伝える前に、30 秒間の準備時間を設ける。伝える人 A は、どの特徴や情報を伝えると良いかを考える時間として活用し、描く人 B は、聞いた内容を的確に判断するための心構えをする時間とする。この時間を設けることで、生徒は限られた時間内で何を伝えるべきかを生徒自身で思考し、事前に伝える内容を準備することができる。この時間がない場合、ただ闇雲に情報を伝えるだけになり、グラフの特徴を捉えるという活動の趣旨からずれてしまう可能性がある。言葉だけという制限があるため、単に通る点をすべて列挙するだけでは伝わりづらくなる。そのため、グラフの増減や変化する箇所といった重要な部分に着目し、どの情報を優先して伝えるべきかを考える必要がある。このような工夫により、学習活動を円滑に進めることができるだけでなく、生徒の思考を促す環境を効果的に作ることができる。
- ③ 伝える人 A がグラフについて伝える時間は 90 秒間と設定した。これは、事前実験として成人 3 人を対象に特定のグラフを言葉のみで伝えるのに必要な時間を計測した結果、平均 60 秒程度であったことを踏まえて、高校 2 年生という生徒の実態を加味して設定したものである。授業実践の結果としては、90 秒の段階で情報を伝え終えたペアは全体の約 8 割であった。授業実践では、いずれのクラスにおいても 20 秒の時間延長を行い、活動を継続させた。これは、すべてのペアがしっかりと情報を伝え終えることを優先し、また、準備した情報を伝え終えた後にさらに的確にグラフを伝えるために、どこに着目すべきかを考えさせる時間を追加で与える目的であった。その場で生徒の様子を踏まえて、必要性を判断した上で指示したものである。生徒の実態や活動の様子をもとに、時間の調整を行う必要があることが分かった。この 90 秒間で伝える人 A は、言葉のみでグラフの形を伝える。生徒には、増減の様子やグラフの形をジェスチャーを用いて伝えることを禁止し、特徴を言葉だけで伝えるように努力させる。また、ペアが描いているグラフは見ないという制限も設けた。これは、ペアが描く様子を見ながら、動きの指示を出すだけになる状況を防ぐことを目的としている。具体的には、ペアが描いている様子を見ながら「“そこから” 上にいく。」「“そのあと” はなだらかに下がる。いや、“もっと” なだらかに。“そんな感じ”。」といった描く人に“動き” を指示をするだけでグラフを描く状況を防ぐためである。グラフの様子を見ながら“そこから” や“もっと” と指示を出せば、かなりの確にグラフを描かせることは可能である。しかし、グラフを描くことだけが今回の学習活動の目的ではない。この活動では、生徒がなんとか捻り出した曖昧な表現だけでは的確に伝えられないことを実感し、数学的な数値を伝えることの必要性に気づくことを目指している。生徒が、言葉だけでグラフの形や変化の様子を伝える難しさを体験することで、今後の学びで扱う平均変化率や微分係数、極大値・極小値のような数学的な数値としての表現の必要性に自然と関心をもつようにすることを、この活動を通して促す。描く人 B は、情報を伝えられる 90 秒間に加えてさらに 30 秒の時間を合わせた合計 120 秒間で、配布するプリント上にグラフを完成させる。この時間内であれば、伝えられた情報をメモし、その後にグラフを描くことが可能である。ただし、伝えられた情報はできる限りメモに残すように指示する。これは、言われた内容をそのまま座標平面上に即座に描き始める状況を防ぐことを目的としている。もし言われるままにグラフを描き始めた場合、後から追加の情報が伝えられると、描いた部分を変更する必要が生じる。また、情報が断片的な段階で描き始めると、グラフ全体の形や特徴を把握することが難しくなる。そのため、与えられた情報が一通り揃った後に、グラフを描けるような環境を整えることが重要であると考え。理想的には、伝える人 A から情報を伝えられる 90 秒間は、描く人 B はメモに集中し、残

りの 30 秒間で追加情報がない状態になってから、メモした情報をもとにグラフを完成させる。このように情報整理と作業の時間を分けることで、生徒は情報を正確に理解し、それをもとにグラフを作成する余裕が生まれる。もし追加情報のない 30 秒間が設定されていなければ、描く人 B は情報を聞きながら同時にグラフを描く必要があり、結果として、グラフを描き終えること自体に重きが置かれてしまう可能性がある。この場合、伝えられる情報がグラフの特徴を示しているにも関わらず、その特徴に着目せず、ただグラフを完成させることが目的化してしまう恐れがある。このような環境を整えることで、学習活動の趣旨に沿った学びを促すことができる。

- ④ この 30 秒間は、伝える人 A が助言や追加情報を出すことなく待機し、描く人 B がグラフを完成させる時間とした。また、描く人 B から伝える人 A への質問も禁止とした。これは、質問を行うことで余分に時間がかかることを防ぎ、学習活動を円滑に進めるための制限であった。しかし、授業実践を行った結果、「描く人 B から伝える人 A に対する質問」が許されることで、さらに学習が深まる可能性があると考えられた。このように考えた理由は、次の 2 つである。1 つ目は、伝える人 A の伝える情報が不十分であった場合に、描く人 B が必要な情報を質問によって補える点である。伝える人 A には、伝える内容を事前に準備する時間を設けているものの、その時間が足りなかったり、その生徒が伝えるのが苦手だったりすることで、的確な情報が十分に伝わらない場合が見られた。2 つ目は、「描く人 B が必要であると考えられる情報」自体が、グラフの特徴に着目するという今回の活動の趣旨にあったものであると考えられる点である。描く人 B が「グラフを的確に描くために必要な情報は何か」を考えながら質問を行うことで、この活動の目的であるグラフの特徴を的確に把握することにつながると考えられる。授業構築段階では、主に伝える人 A にのみ焦点を当て、グラフの特徴を的確に捉え伝える中で、着目する特徴を考察することを目指していた。しかし、授業実践を通じて、描く人 B が質問する時間を設けることで、描く人 B 自身の学びを深めることができると考えられるようになった。したがって、伝える人 A だけでなく描く人 B にも学びを深める機会を提供するために、必要に応じて質問する時間を設けるような改善が効果的であると考えられる。

この②～④の活動を行う際の注意点として、次の 4 点を示す。「1. 伝える人は言葉だけ」「2. 描いているものは見ない」「3. 質問はしない」「4. 対戦ではなく協力」である。1～3 については前述のとおりであるが、ここで特に強調すべきは、「4. 対戦ではなく協力」である。この活動では、グラフの特徴に着目し的確に伝えるものであり、勝ち負けを競うものではない。よりの確なグラフを再現できるようペアで協力し合う姿勢が重要である。これにより、ペアでの対話的な活動が促進し、グラフのどのような特徴に着目する必要があるかを考察できるようになる。活動を通して、「自分のグラフの特徴を伝え、ペアが同じグラフを描くことができる」と「ペアからの情報をもとに、ペアのグラフと同じグラフを描くことができる」という 2 つの役割を、ペアと協力して成功させることを目指すことを確認する。

- ⑤ 一連の流れを終えた後も、この段階ではグラフの答え合わせは行わず、役割を交代して再度活動を行う。このようにする理由は次の 2 点である。1 つ目は、ペアのいずれの生徒も同じ条件で活動に参加できるようにするためである。一度答え合わせを行うと、その結果に影響され、役割を交代した際の活動が前回の結果を踏まえたものになってしまう。そのため、前半と後半で条件が異なる状態を防ぐことが目的である。これにより、いずれの生徒も両方の役割において同様な経験ができ、生徒は同じ目線でその後の話し合いを行うことができる。さらに、2 つの役割において感じたことを共感しやすくなる。2 つ目は、答え合わせの時間を役割交代後に一度にまとめて行うことで、互いの考えや感じたことを共有する時間を十分に確保することができるという点である。もし答え合わせを別々に行うと、学習活動の前半で一度区切りがついてしまい、役割を交換した後半の活動が形式的になり、集中力や意欲が低下する可能性があると考えられる。さらに、答え合わせの際に同時にグラフを見せ合うことで、的確に伝えられた場合と伝えられなかった場合を比較でき、どのよ

うな情報が必要だったかを振り返る機会を自然と設けられる。この比較により、生徒はどの特徴を伝えるべきだったのか、あるいはどの情報が不足していたのかを具体的に考察しやすくなる。その結果、次の学びにつながる気づき生まれ、学習活動全体のまとまりが明確になる。

- ⑥ ペアで役割を交代して、いずれの生徒も同様の経験ができるようにする。伝える側としてのグラフの特徴を言葉として言語化する難しさを体感し、描く側としてのグラフを描くためにどのような情報が必要であったかを考える機会を作ることができる。それにより、その後の話し合いで両方の視点を踏まえて考察することができる。
- ⑦ 役割交代を終えた後、前半と後半の答え合わせを一度に行う。互いに画面を見せ合い、実際に描いたグラフと照らし合わせることで、伝えた内容がどの程度正確に伝わったかを確認する。また、正解のグラフをプリントに描き、言葉だけで伝えられた情報をもとに描いたグラフを比較できるようにする。プリントでは、上下で比較できる配置(付録1 参照)にしているため、記録を残したメモを活用しながら、どの情報が不足していたかを具体的に考察することが可能である。
- ⑧ 伝えなかった正解のグラフと、言葉だけで伝えられた情報をもとに描いたグラフと比較することで、よりの確にグラフの形を的確に伝えるためにどのような特徴に着目する必要があるかペアで考察する。考察した内容は、miro の付箋機能を活用して全体で共有する。この共有の場を通じて、他のペアの気づきを知り、さらに学びを深めることを目的としている。このように、自分の意見を共有し他の意見を見ることができる双方向的な共有をすることで、生徒は自分の活動を振り返るだけでなく、全体の気づきを通じて新たな視点を得ることができる。具体的な生徒の意見については後述(p. 32 参照)する。

このような意図をもとに、学習活動を次のように行う。

流れ グラフを言葉だけで伝える学習活動

- ① 教師のパソコンで、図 8 をスクリーン上に提示する。
- ② 教師は(miرو)のタイマーを用意し、活動中はタイムキーパーを担う。
- ③ 図 8 の①～⑧の流れで、生徒主体の活動を行う。

以下では、実際に行われた 2 つのペアの活動の様子について述べ、次の 3 つを示した上で考察を行う。1 つ目は、ペアの伝える側の生徒が GeoGebra で作成した、伝えたい正解のグラフである。2 つ目は、そのグラフを伝えるために、伝える側が発言した内容である。これは、生徒の音声記録をもとにグラフに関わる発言を抜き出したものである。3 つ目は、その発言を受けて結果として描かれたグラフである。ただし、ペア 2 においては、筆者が描き直したグラフである。

【ペア 1 の活動の様子】

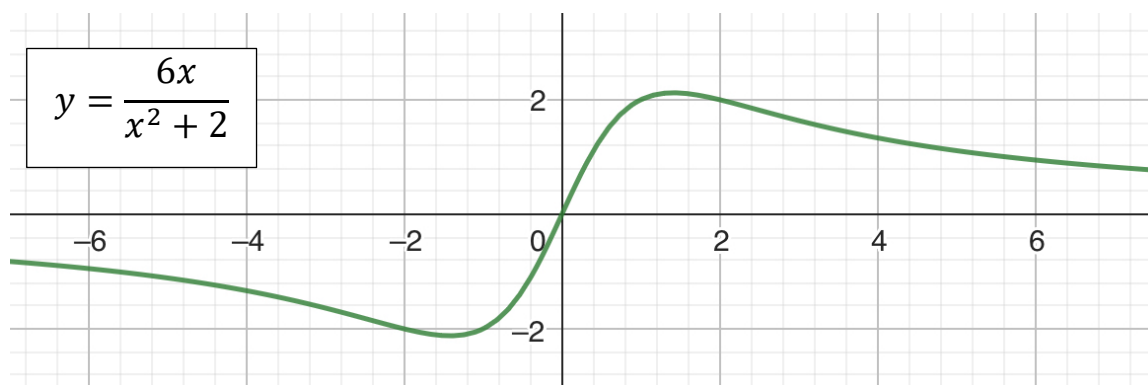


図 9 ペア 1 の伝える側が GeoGebra で作成した伝えたい正解のグラフ

①	原点を通る
②	第1象限と第3象限にある
③	第1象限には1回急な山がある
④	そこから x 軸にだんだん近づく
⑤	原点から山があつて x 軸に近づく
⑥	x が1.2, y が2.1ぐらいのところに丁度、てっぺんの部分がある
⑦	原点で点対象
⑧	180度回転させたものが第3象限に来る

表1 ペア1の伝える側が伝えた発言

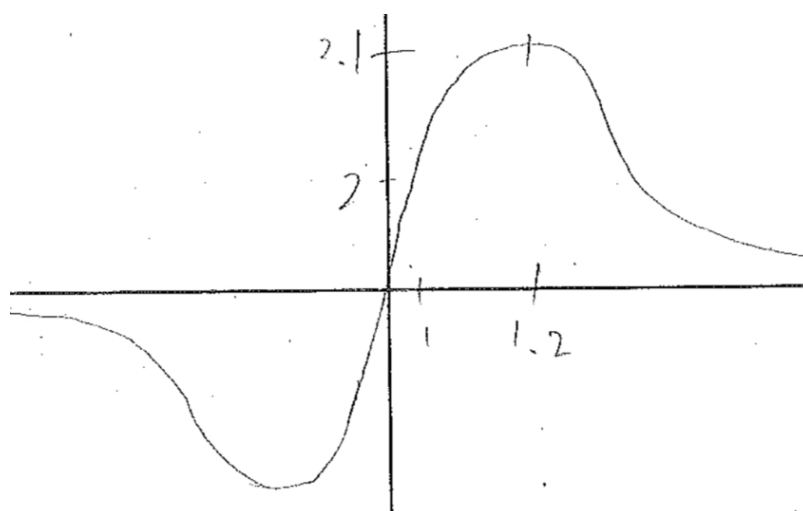


図10 伝える側の発言を受けて描く側が描いたグラフ

ペア1の活動においては、全体的にグラフの形が正確に伝えられていることが確認できる。その中で、特に注目すべき点として、以下のような考察が挙げられる。まず、⑦「原点で点対象」や⑧「180度回転させたもの」という発言から、伝える側の生徒がグラフの対称性を明確に認識していることが分かる。描く側もこれを正確に反映しており、第1象限と第3象限の形状が対応していることから、点対称性という数学的特徴が共有されていることが確認できる。さらに、②「第1象限と第3象限にある」という発言が⑦や⑧の対称性をより補強する役割を果たし、全体的なグラフの形の認識をより明確にしていると考えられる。具体的な座標について伝えることが効果的に機能している。これにより、頂点の位置が描かれており、具体的な数値を伝えることで的確にグラフを描く助けになることを示していると考えられる。一方で、③「急な山」や④「そこから x 軸だんだん近づく」といった感覚的で曖昧な表現が、伝える側と描く側で認識の違いが生じた可能性がある。特に、描く側の生徒の x 軸と y 軸の幅の取り方にずれが見られ、グラフのなだらかさや縮尺が一致していない点を確認された。これは、感覚的で曖昧な表現の限界を示しており、もし明確な傾きを具体的な数値として伝えていれば、描く側の座標設定も適切に修正され、よりの確にグラフの形を伝えることができたと考えられる。

以上のことから、数学的な数値として表現することで、よりの確なグラフを描くことができるという必要性を実感することができるペア活動であったと考えられる。感覚的で曖昧な表現では、伝える側と描く側の間で認識のずれが生じやすいが、具体的な数値を用いることでそのずれを最小限に抑え、的確にグラフの形を共有できる。この活動は、生徒が曖昧な言葉ではなく、数学的な数値を用いる表現の重要性を実感するきっかけとなり、微分を学ぶ意義を自然に理解するための基盤として有効であると考えられる。

【ペア 2 の活動の様子】

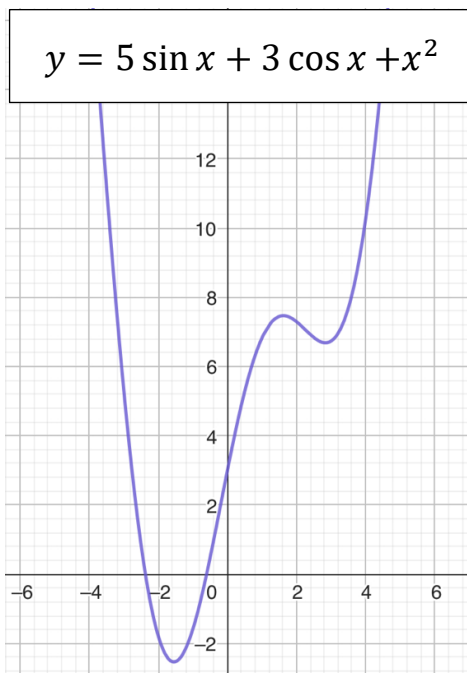


図 11 ペア 2 の伝える側が GeoGebra で作成した伝えたい正解のグラフ

①	(0,3)を通る
②	(1.61,7.47), (2.83,6.69), (-1.55, -2.53)をつなげる
③	(-1.55, -2.53)からビュンって上にいく
④	波
⑤	放物線みたいなやつ 2 個繋がってる
⑥	最後もビュンっ上にいく

表 2 ペア 2 の伝える側が伝えた発言

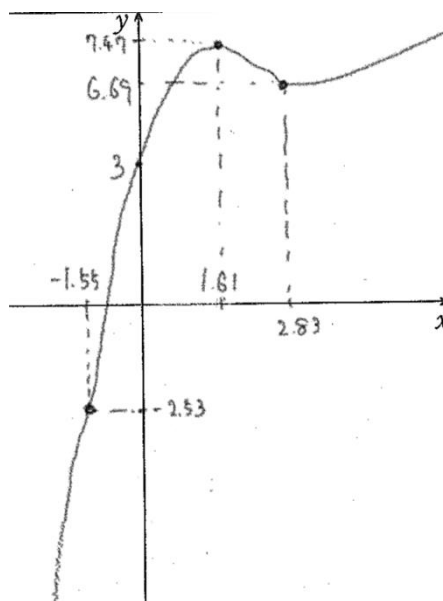


図 12 伝える側の発言を受けて描く側が描いたグラフ (筆者代筆)

ペア2の活動においては、通る点は的確に捉えることができているが、 $(-1.55, -2.53)$ で谷の底のようにになっている様子や $(2.83, 6.69)$ からのグラフの進む方向が正解のグラフの形と異なることが確認できる。その中で、以下のような考察が挙げられる。まず、①や②の発言のように具体的な座標が伝えられたことで、描く側に的確に反映されていることがわかる。通る点の具体的な座標を伝えることで、ある程度のグラフの動きを伝えることは可能である。ただし、今回伝えた4つの点はいずれも特徴的な部分を示しているが、描く側にとっては単なる通る点の情報として受け取られていることが読み取れる。実際に、 $(-1.55, -2.53)$ では単なる通る点として描かれており、谷の底としての特徴が表現されていない。これにより、伝える側は、谷の底のような特徴的な点の様子を補足的に伝える必要があったことがわかる。さらに、③や⑥の「ビュンって上にいく」といった曖昧な表現は、描く側の認識のずれを生じる要因となっている。特に、⑥「最後もビュンって上にいく」という発言を受けて描いたグラフでは、伝えたいグラフと進む方向が異なっている。これは、曖昧な表現ではグラフの変化の程度や方向が人によって異なり、的確に伝えることが難しいためである。また、数学Ⅱまでを学習している生徒が図11のような「下がって上がって下がって上がる」といった複雑な形を理解するためには、さらなる補足情報が必要であったと考えられる。このような場合、極大値や極小値を用いた増減表のように数学的な数値を伝えることで、グラフの特徴をよりの確に表現できる可能性があることが考えられる。

以上のことから、感覚的な表現や特徴的な座標のみを伝えるのではなく、グラフの変化や傾きを数学的な数値を用いて伝えることが、的確にグラフの形を伝える上で不可欠であることが明らかになった。数学的な数値を用いることで、共通の認識を持つことができ、人による認識の違いを防ぐことが可能になる。この活動は、微分の学習を通じて「瞬間的な傾き」を数値で表現する意義を生徒に深く理解させるための重要な役割を果たしており、生徒が数学的に数値を表現することの価値を実感する機会を提供することができたと考えられる。

4. よりの確に伝えるために何に着目すべきかを共有

言葉だけでグラフを伝える活動を行い、正解のグラフを答え合わせする中で、どのようなグラフの特徴に着目すればよりの確に伝えられたかを考え、共有する時間を設ける。この時間を通じて、生徒は活動の中で得た気づきを今後の学習に活かし、学びのつながりを実感することができる。生徒には、以下の問いかけを行い、miroの付箋を用いてそれぞれの考えを全体で共有する。()内は、補足的に伝える。

問いかけ

どのようなことを伝えたら、グラフの形をよりの確に伝えることができるか。

(伝えることに失敗したペアは、どのようなグラフの特徴に着目し、それを伝えれば成功できたかを、発言のメモをヒントに考える。)(かなり近い形のグラフを描くことができたペアは、よりの確に伝えるために、必要十分な情報とはどのような特徴であるかという視点で考える。)

この問いかけの意図は、生徒が自分たちの活動を振り返り、どの特徴に着目することが重要で、どのように伝えるべきだったかを整理する中で、グラフの特徴の数学的な数値の表現の必要性を実感することを目指している。特に、失敗した場合には「どんな情報を伝えるのがよかったのか」を具体的に考え、成功した場合には「どの発言が重要で必要だったのか」「どの情報があれば十分だったか」を考えることで、生徒自身で伝える内容や伝え方をより深く振り返ることができる。グラフの特徴に基づく表現は、今後の微分の学習内容につながる。例えば、「ビュンと」「山がある」といった曖昧な表現では、相手に正確に伝わらないことがあることを体感することで、数学的な表現の重要性に気づくことができる。「傾きが3くらいで増加する」「 $x=2$ で極大値5をとる」といったように数学的な数値の表現を用いることで、生徒はグラフの形を的確に捉えることができ、微分の学習内容であるグラフの概形の学びをより深めることができる。

その後、次のような順序で個人の考えをクラス全体で共有する。これは、すぐにペアと話し合うのではなく、まずは自分自身の意見を整理し深く考える機会を与えることを目的としている。個人での意見を明確にした上で共有することで、全体での共有において学びをより深めることができる考える。

個人で考える→個人で付箋作成→ペアと共有→クラス全体で共有

これは、先に行った A クラスの授業実践を踏まえ、B クラスで順序を改善したものである。A クラスでは、「個人で考える→ペアと共有→ペアで付箋作成→クラス全体で共有」という流れで進めた。その結果、ペアで話し合う中で意見が絞られ、付箋作成では「1 番重要だと考える情報」のみを書き出すペアが見られ、絞られた意見のみが共有された(参考資料(4)参照)。A クラスでの実践では、ある程度十分な数の意見を共有することができた。しかし、他のクラスでの実態によっては、クラス全体で共有する際に出てくる意見のバリエーションが少なくなってしまう可能性があると考えた。これは、授業実践後に生徒のプリントとペアで作成された付箋を比較した際、プリントには幅広い考えが記載されていることから判明した。このため、A クラスの授業内での指示が十分に適切でなかったことが課題として浮かび上がった。そこで、B クラスでは、「まず個人で考えた内容をそのまま付箋に書き出してもらい、その付箋をペアで共有し、考えを深め修正した上で、全体で共有する」という順序に変更した。この順序変更により、各生徒の個人で考えた内容が絞り込まれるのを防ぎ、そのまま反映されつつ、ペアでの話し合いを通じて意見を深めた多様な意見を、全体で共有する機会が確保された。

以下の表 3 は、2 クラスの授業実践において、実際に生徒が考えた内容を生徒が書いた言葉を用いてまとめたものである(参考資料(4)参照)。ここでは、全体で付箋を用いて共有された考えを中心に整理した。ここで重要視するものは、個数ではなく、どのような意見が出たかである。

理系 A クラスで共有された考え (A1～A18)		文系 B クラスで共有された考え (B1～B18)	
A1	傾きの大きさ	B1	カーブ・曲がり具合
A2	グラフの変化	B2	増加と減少の仕方
A3	次の座標へ上がるか下がるか	B3	点とてんのつながりかた・変化
A4	進む向き・順	B4	どんな方向に進んでいくか
A5	最大値・最小値	B5	最大値と最小値
A6	グラフの幅	B6	グラフの形
A7	グラフの形	B7	グラフの種類
A8	直線か曲線か	B8	何回曲線がくるか
A9	どんなものに似ているか	B9	対称性・周期性
A10	点対象・線対象になっているか	B10	山・谷
A11	山がくる座標	B11	軸とグラフの位置関係
A12	象限の場所	B12	どの象限を通るか
A13	無限に続くか	B13	特定の範囲に収まるグラフなのか
A14	わかりやすい点の座標	B14	グラフが通る座標
A15	原点を通るか	B15	原点を通るか
A16	x軸とy軸でどこを通るか	B16	x軸y軸どこで交わるのか
A17	上に凸か下に凸か	B17	下に凸か上に凸か
A18	式にどんな関数を含むか	B18	習ったことがある関数か

表 3 各クラスで共有された生徒の考えの一部

生徒が共有した付箋をスクリーンに提示し、いくつか取り上げる。ここで、学習活動の流れを振り返り、生徒に次のような流れで今後の学びにつなげることができるように促す。

流れ 今後の学びへの確認

- ① 各自で自由に関数を入力して、オリジナルなグラフを作成し、多くの生徒が単純な形ではないユニークなグラフを作成していたことを確認する。
- ② それを言葉だけで伝えるという活動に取り組んだ後、よりの確にグラフの形を伝えるためにどのようなことを伝えるべきかを考えたことを確認する。
- ③ 共有された付箋は、グラフの形を伝えるために着目した重要な部分として考えたものであることを再度確認する。
- ④ 「このような特徴がわかれば、本当に同じ形のグラフを描くことができるのか」と問いかける。

この問いかけに対して、多くの生徒は「描くことができる」という反応を示していた。それは、これらの情報が生徒自身でペア活動を通じて必要であると実感し、考え出したものであるからである。このような特徴がわかることで、グラフを描くことができることを改めて確認する。これは、グラフの特徴を数学的な数値として表現する必要性を、次の授業冒頭で行う活動を通じてさらに明確にするための布石である。曖昧な表現だけでは、正確にそのグラフの形が伝わらないことを実感することで、数学的な数値を用いた表現の重要性に気づかせることが狙いである。例えば、「ビュンっと上がる」といった曖昧な表現では、どのくらいの具合で上がるのか、どこまで上がるのかが明確ではない。「傾きが3で増加する」といった具体的な表現を用いることで、傾きという共通の認識をもとに的確に把握することが可能になる。さらに、このような考え方自体が微分全体の学習内容につながることを確認する。

授業の最後に、次の授業冒頭で「代表者1名が自分のグラフを言葉だけで伝え、他の生徒全員がそれをもとにグラフを描く活動」を行うことを予告し、2授業目を終了する。

第4節 3授業目 ICTによる平均変化率の確認から微分係数

3授業目では、前時の学習活動を学級全体で行い、数学的な数値で表現する必要性を実感させ、平均変化率をICTを用いて視覚的に確認する中で、生徒自身で「平均変化率の極限值」という微分係数について考えることを目指している。2授業目の活動を学級全体で行い、グラフの特徴を数学的な表現で示す必要性を生徒に実感させる。そこから、2つの点の変化に着目し、中学校で既習の「変化の割合」から「平均変化率」を定義する。その後、平均変化率をGeoGebraを用いて生徒が自由に値を動かし、視覚的に不思議な現象を体験することで生じた疑問に着目し、その対処法を考える過程を通じて微分係数の定義へと自然につなげるよう設計している。その際に、既習の学びである極限値の必要性に気づき、生徒自身で「平均変化率の極限值」を導くことができる。これにより、形式的に微分係数を定義するのではなく、生徒の気づきから導出することができ、学びを深められる。

本時の目標は、「平均変化率を表す直線が消える瞬間について考察し、既習の極限値を用いて微分係数の式を導くことができる」として、生徒が既習の学びと新しい学びのつながりに気づき、そのつながりを活用して解決することを目指す。

1. クラス全体によるグラフを言葉だけで伝える活動

2 授業目の学習活動では、活動の中でグラフを描く際、ペアから伝えられた内容をプリントにメモとして残すように指示している。教師が、前時の授業終了後、生徒が残したメモに着目し、学習活動の例として取り上げたペア 2(p. 30 参照)のような「ビュンっと」のといった「曖昧な表現を用いた生徒」を取り上げる。この生徒には、2 授業目が始まる前に、以下の意図を伝え、了承を得た上で代表者として伝える役を指名する。

指示 前時の活動で「曖昧な表現を用いた生徒」に伝える本時の活動の意図

- ・ 学びを深めるための良い例として代表者に指名したこと
- ・ 曖昧な表現では的確にグラフの形が伝わらない可能性があることを他の生徒に実感させることが目的であること
- ・ 前回の活動で発言した内容から特に変える必要はないこと

これは、生徒が曖昧な言葉の表現ではグラフの形が伝わらないことを実感し、数学的な数値の表現の必要性に気づけるようにすることである。活動の流れは前回と同様な流れである。指名された代表者は、クラス全体に向けてグラフの形について言葉だけで伝える。以下に、学習活動の例として取り上げたペア 2 の生徒を代表者として指名した際の授業実践で行った流れを用いて示す(p. 30 参照)。

流れ 代表者によるクラス全体への「グラフを言葉だけで伝える活動」

- ① 前回の活動と同様(図 8 参照)の流れで進める。
- ② 描く側の生徒は前時のプリントの裏面の座標平面にグラフを描く(付録 2 参照)。
- ③ 教師は、代表者の発言した内容を、その言葉を用いて黒板にメモを残す。
- ④ 正解のグラフをスクリーンに提示し、他の生徒が自分の描いたのグラフと比較できるようにする。

教師が生徒の発言をメモするのは、後に生徒の言葉について具体的に言及し、学びを深めるための材料として活用していくために残しておくものである。板書したメモをもとに代表者の発言の曖昧な表現に着目し、次のような流れのように教師から伝え、生徒の学びを深めていく。

流れ 曖昧な表現をもとに数学的な数値の必要性の確認

- ① 代表者が伝えなかった「ビュンっと」が、正解のグラフのような具合を表していることを、スクリーン上で示しながら確認する。
- ② 他の生徒が「ビュンっと」をどのように解釈したかを、周りの人と描いたグラフを見せ合うことで確認する。これにより、人によって「ビュンっと」の受け止め方が異なり、その結果グラフの形が変わることを実感させる。
- ③ 「(0,3)を通る」といった発言については、ほとんどの生徒は同様な認識で受け止めていることを確認する。「ビュンっと」といった発言とは異なり、「(0,3)を通る」では認識の違いが生まれない理由について考えさせる。
- ④ (0,3)という具体的な値では、伝える人と受け止める人の共通の「座標」という認識がある。一方、「ビュンっと」は人によって解釈の違いが生まれる原因があることを確認する。
- ⑤ 「『ビュンっと上がる』ことを、共通の認識として表現するにはどうすればよいか」を問いかける。
- ⑥ 「点と点の変化について、中学校で学習したものはないか」とヒントとして出す。
- ⑦ 傾きや変化の割合が「ビュンっと」という曖昧な具合を表していることを確認する。
- ⑧ 実際に、「傾き3」や「傾き5」の直線をグラフ上で示し、視覚的に違いを表せることを確認する。
- ⑨ このように、数学的な数値を用いて表すことができれば、曖昧な表現で伝わりにくいものを、具体的に共通の認識のあるものになることを実感させる。

このような流れを通じて、生徒に数学的な数値の表現の必要性を実感させるとともに、「変化の割合」から発展して新しい「平均変化率」を自然に理解させることを目指している。また、曖昧な表現ではなく、数学的な数値の表現から、グラフの形について考えていくことは、微分の学習内容の中心となってくることを確認する。

2. 点の変化に着目して平均変化率を GeoGebra で確認

学習活動で着目したグラフの特徴を、平均変化率といった数学的な数値で表すことを確認するために、次のような流れを取り入れる。

流れ 学習活動から変化の割合について確認

- ① グラフの形を伝えるために着目すべき特徴として共有した(表3参照)付箋を再度提示する。
- ② その中で、授業冒頭の活動で出てきた「ビュンっと」に関係ある特徴がどれかを問いかける。
- ③ 「傾きの大きさ」や「点と点のつながり方・変化」が関係あることを確認する。
- ④ 「ビュンっと上がる」ような曖昧な表現を数学的な数値を用いて表現することについて深めていくことを確認する。
- ⑤ 「傾きの大きさ」について中学校数学で既に学習していることを確認し、次のように、変化の割合について復習する。

定義 変化の割合

x の値の変化に対して、 y の値がどれくらいの割合で変化したかを表す値 (変化の割合) $= \frac{(y \text{の増加量})}{(x \text{の増加量})}$

(特に、1次関数 $y = ax + b$ においては、「変化の割合」は常に一定で、「傾き a 」と等しい)

変化の割合について復習する中で、“1次関数 $y = ax + b$ においては”変化の割合は常に一定であることと、傾き a と等しいことを確認する。2次関数のように他の関数では、変化の割合は常に一定とは限らないことについても確認する。中学校で学習した「変化の割合」は、どれくらい変化したかの割合を示すもので、「 x が1増えるごとに、 y はどれだけ増えるかを表す値」と考えることができる。高等学校数学では、変化の割合と同じような2つの点での変化を表す値を、一般的に「平均変化率」ということを確認し、次のように定義する。

定義 平均変化率

関数 $y = f(x)$ において、 x の値が a から b まで変化するとき、 $\frac{(y \text{の変化量})}{(x \text{の変化量})} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ を、 $x = a$ から $x = b$ までの関数 $f(x)$ の平均変化率という。

変化の割合と平均変化率には大きな違いは見られないが、「 x が1増えるごとにどのくらい変化するか」の割合に着目したものが変化の割合、 x が a から b までに変化したときの平均的な変化に着目したものが平均変化率」と認識し、曲線のような変化を扱う高等学校数学においては平均変化率を用いていると考えている。生徒には、変化の割合と平均変化率の大きな違いはなく、高等学校数学では平均変化率という呼び方を用いることを確認する。その後、変化の割合の復習も兼ねて、次のような平均変化率を求める練習問題を段階的に提示する。

練習問題

- (1) 1次関数 $y = 2x$ の、 $x = 1$ から $x = 4$ までの平均変化率を求めよ。
- (2) 2次関数 $y = x^2$ の、 $x = 1$ から $x = 1 + h$ までの平均変化率を求めよ。
- (3) 関数 $y = f(x)$ の、 $x = a$ から $x = b$ までの平均変化率を求めよ。

解答 (1) 2 (2) $2 + h$

$$(3) \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

練習問題の出題意図は次の通りである。

- (1) 初めの問題では、1次関数を扱い、生徒が平均変化率が中学校で学習した変化の割合と同じ

であることを確認させる。1 次関数では、変化の割合が常に一定であることを計算とグラフの両方で確認することで、 x の変化量と y の変化量を視覚的に認識できることを確認させる。

- (2) 2 次関数のような曲線を扱い、直線ではない関数にも同様に平均変化率を適用できることを確認させる。また、文字を含む場合においても、同様に考えることができることを確認する。変数に具体的な値を代入することで、平均変化率が簡単に求められることを実感させる。
- (3) 関数 $y = f(x)$ という任意の関数においても文字を用いて表すことができることを確認させる。この際、解答の式が平均変化率の定義そのものであることを強調し、公式として覚えるのではなく、意味を理解すれば良いことを生徒に実感させる。

このような段階的な練習を通して、生徒は高等学校数学における平均変化率について理解する機会を設ける。また、グラフを描くことで、生徒は単に公式として平均変化率を理解するのではなく、意味を視覚的かつ具体的に捉えることを目指している。グラフ上で点と点を結ぶ直線の傾きとして平均変化率を認識することで、数値計算と図形的なイメージを結びつけることができる。練習問題の確認を行なった後に、発展問題として次の 1 問を出題する。

発展問題

関数 $y = f(x)$ の、 x 座標が a から「 a から h だけ離れた点」までの平均変化率を求めよ。

解答 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

この問題では、単に公式として考える場合、文章だけでは十分に読み取りにくい工夫を施している。具体的には、「 x 座標が a から『 a から h だけ離れた点』まで」という状況について、生徒自身で x の変化量として考え、理解する必要があるように設計している。この過程において、グラフを描くことがその理解を容易にすることを実感させることを目指している。実際にグラフ描くことで、「 x 座標が a から h だけ離れた点」が $a + h$ を表していることが視覚的に明確になる。これによって、「 x 座標が a から『 a から h だけ離れた点』まで」の x の変化量は $(a + h) - a = h$ であることをグラフから直感的に理解することができる。これにより、次の ICT を用いて平均変化率を視覚的に認識する活動をより明確に理解することができる。

3. 直線が消える瞬間についての考察

ここでは、前述の発展問題で扱った、関数 $y = f(x)$ の、 x 座標が a から「 a から h だけ離れた点」までの平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ について GeoGebra を用いて深めていく。この平均変化率の a と h を自由に動かせるような GeoGebra を使用する(付録 3 参照)。ここで使用する関数 $y = f(x)$ に関して特定な関数の取り決めがないため、授業冒頭行った活動で代表者が使用したグラフの関数を用いる。これは、教師が新たな関数を提示するのではなく、生徒が活動の中で作成したグラフを用いることで、学習活動からの流れを止めることなく、活動の延長線上に発展的な学びを位置付けることができる。これにより、生徒は自分たちの活動が授業の発展に寄与していることを実感し学びの意欲を高めることを目指している。生徒には次のような指示を行う。

指示 GeoGebra を用いて平均変化率を深める

- miro に提示してある GeoGebra のリンクから、それぞれ割当てられた個人ページに移動すること
- 平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の a と h のスライサーを自由に動かして、その変化の様子を確認すること

生徒は次の図 13 のように a と h のスライサーを自由に動かし、作成される傾きの直線の変化を視覚的に確認する。

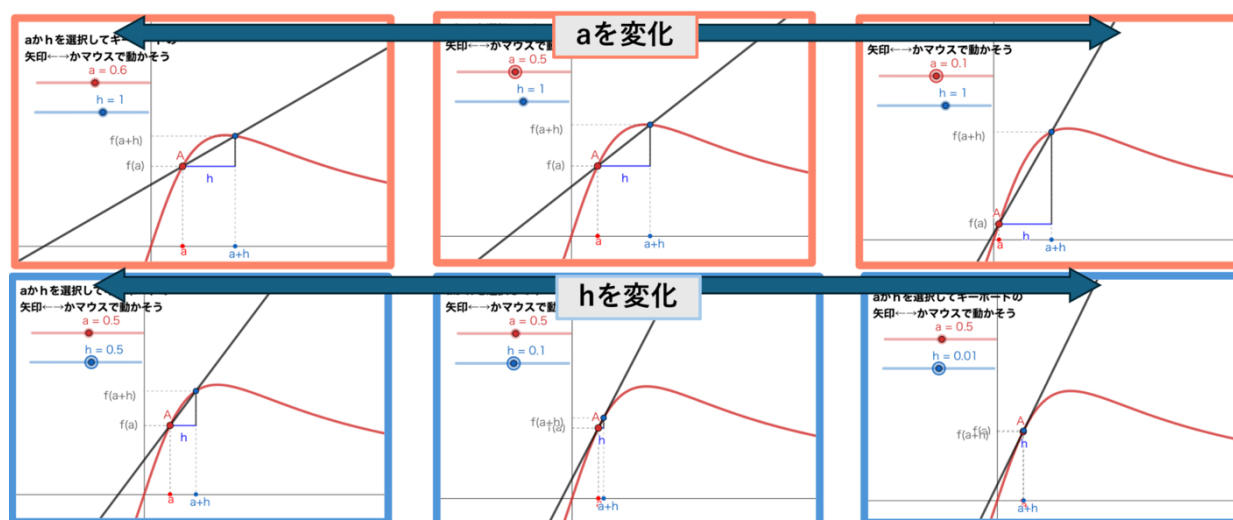


図 13 代表者のグラフにおける平均変化率を自由に動かせる GeoGebra

この活動は、視覚的な確認を通じて平均変化率の理解を促進することを目指すものである。生徒は、平均変化率が 2 点間の変化を表す値であり、それが 2 点を結ぶ直線の傾きと等しいことを実感することができる。さらに、この活動は微分係数の定義の導入につながる布石としての役割も担っている。生徒が、GeoGebra 上でスライサーを用いて a と h の値を自由に動かし、作成される直線を確認していく中で、ある特定の瞬間にその直線が視覚的に際立った変化が起こることを発見する。それは、次の図 14 のように、 $h = 0$ の瞬間のみ、2 点を結ぶ直線が消えるという現象である。

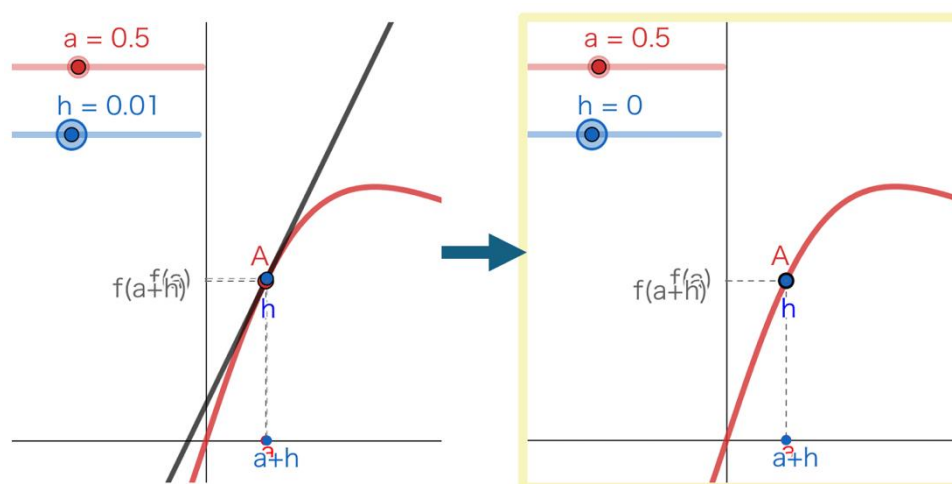


図 14 $h = 0$ の瞬間のみ直線が消える現象

他の場合では、 h の変化に伴って直線の傾きが変化するだけであるが、この瞬間だけ直線が消える。この現象は、値を自由に操作している生徒にとって不思議で興味を引く体験である。この現象は、授業実践においても、数名の生徒が気づいたことでクラス全体へと共有され、その場で話題となり伝染していく中で、生徒自身で実際に試して気づくことができた。これは、視覚的に不思議な現象を体験することで疑問を抱き、その対処法を考える過程を通じて、生徒自身で微分係数の定義へとつながるように設計した工夫点③(p. 10 参照)で述べたものである。ICT 上では、 $h = 0$ の場合、分母が 0 となり定義できないため、直線

が描かれなくなるのは理論的に当然のことである。しかし、この瞬間的な変化は、自由に値を動かして変化を見ている生徒にとって非常に不思議なものと感じられると考えられる。これを受けて、生徒に、直線が消える理由と対処法についての問いかけ①②を段階的に行う。

問いかけ①

平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において $h=0$ のとき、直線が消えたのはなぜか。

問いかけ②

$h=0$ の場合でも、平均変化率を求められる対処法があるか。

問いかけを行った後に次のような流れで全体で確認をする。

流れ 直線が消える理由と対処法についての確認

- ① 個人で問いかけ①②を考える時間を設ける。
- ② ペアで対話する時間を設け、お互いの考えを共有させる。
- ③ 一度「直線が消えた理由」についてのみ全体で確認する時間を取り入れ、数名の生徒に「直線が消えた理由」を発表させる。
- ④ それを踏まえて、再度ペアで「その対処法」について話し合う時間を設ける。
- ⑤ 「その対処法」について全体で確認する。

一度直線が消えた理由について全体で共有することで、生徒がその対処法を考える際の出発点を明確にするためである。対処法としては、「 h を0にするのではなく、 h を0に限りなく近づける」が適切であり、極限值を用いることで解決できるという気づきに生徒が自ら到達することを目指している。以下は、問いかけ①に対する生徒の考えを取り上げたものである。

生徒 直線が消える理由

- ・ 割り算は0で割れないから。
- ・ $h=0$ になったら、 $\frac{f(a+0)-f(a)}{0}$ となり計算できないから。
- ・ 分母が0の分数になってしまい計算不可能だから。
- ・ $h=0$ になったことで、 $f(a+h)=f(a)$ となり、 y の変化量が $f(a)-f(a)$ で0となったから。
- ・ 分母は x の変化量であり、それが0になって変化していないから。
- ・ 2点間の距離がないから、直線がかけない。
- ・ $a+h$ の h が0になるとただの a なので、1点になるから。
- ・ 「 a から h だけ離れる点」だから $h=0$ だと、 a と同じ場所にあることになって変化しないから。

直線が消える理由として、生徒から大きく2つの考えが見られた。1つ目は、「平均変化率の分母が0になり、計算ができないから」という平均変化率の式に着目した考えである。実際に、平均変化率の式では、分母にあたる h が0になるため、分数として計算が定義できなくなる。分母が x の変化量であり、 $(a+0)-a=0$ となるため、式そのものが成立しなくなるという視点に基づく考えである。2つ目としては、「2点と同じ座標になるから」というグラフに着目した考えである。実際に、 $h=0$ のとき「 a から h だけ離れる点」は、 a と同じ座標となる。このため、2点間の変化はなく、グラフ上では直線を引くための2つの異なる点が存在しなくなることが読み取れる。この2つの考えは、式とグラフという異なる視点から平均変化率について捉えているが、いずれも正しいと考えられる。式に着目する考えは、計算の仕組みや数学的な構造を理解する上で重要であり、グラフに着目する考えは、視覚的な理解を深め、数式とグラフの関係を考察する上で重要な役割を果たすと考える。両方の側面から直線が消える現象を捉えることができること

で、学びがより多面的かつ深いものとなる。このような考えを全体で共有した後に、再度ペアで「その対処法」について話し合う時間を設けて、全体で共有する。以下は、問いかけ②に対する生徒の考えを取り上げたものである。

生徒 対処法

- 0ではない数にする。 $h \neq 0$ にする。
- a をから少しでもいいから離すこと。
- h を0にするのではなく、 h を限りなく0に近づける。
- h を0に限りなく近づける。
- 極限值を使う。 $\lim$ を使う。
- $\lim_{h \rightarrow 0}$ にすれば解決…？
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を考える。

直線が消える現象において「 h を0にすること」が原因であることから、「 h を0ではない数にする」または「 h を0に限りなく近づける」という大きく 2 つの対処法が生徒から提案された。ここで、現在考えている現象は、「 $h = 0$ のとき直線が消えた」という状況であるため、「 h を0ではない数にする」という対処法は適していないことを全体で確認する。一方で、「 h を0に限りなく近づける」という対処法に着目すると、この考え方自体が1授業目で学習した極限值に他ならないことがわかる。これは、授業設計における工夫点①と③(p. 9, 10 参照)で取り入れたものである。工夫点①で極限值を先に学習しているため、この部分で改めて極限値の時間を設ける必要がなく、既習の学習が自然につながるような円滑な流れとなる。授業実践においても、この対処法を考える過程を通じて、生徒自身で「極限值を使うことで解決する」と導き出すこ

とができた。この結果、導き出された式 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ そのものが微分係数の定義を式で表したものであ

る。このような活動を通して、生徒は既に学習した学びが新しい学びにつながることを実感することができ。また、次に学習する微分係数の定義を教師が一方的に提示するのではなく、生徒自身が導き出した式を通じて定義を確認することが可能になる。この過程により、生徒は数学的な定義がただ与えられるものではなく、自らの考察と既習の学びの活用によって導き出すことができることを体験する。さらに、生徒が自ら考え、これまでの学びを活用して導き出した結果を基に学習を進めることで、主体的に学習に取り組む態度を高めることができると考える。教科書や教師が「平均変化率の極限值を考えてみよう」と指示するのではなく、生徒自身が「平均変化率の極限值を考えてみた」という体験を通じて微分係数にたどり着くことで、その意味理解と学習態度に深く影響すると考えられる。

4. 「平均変化率の極限值」から微分係数

前の活動で、生徒はGeoGebraを用いて平均変化率の値を自由に操作し、視覚的に不思議な現象を体験することで生じた疑問に着目し、その対処法を考える過程を通じて、既習の学びである極限值を活用することで解決することができた。この活動を基に、以下を踏まえて、微分係数の定義へと流れていく展開を取り入れる。

流れ 平均変化率の極限值から微分係数へ

- ① 前の活動で、生徒が考えた $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ という式を取り上げる。
- ② この式が「平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の h を 0 に限りなく近づけた極限值」を表していることを確認する。
- ③ 既に提示した極限值と平均変化率の定義を再提示する。
- ④ 以下のように、新たな微分係数の定義を提示する。

定義 微分係数

関数 $f(x)$ の、 $x = a$ から $x = a + h$ までの平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ において、 h が 0 に限りなく近づくとき、この平均変化率が一定の値に限りなく近づくならば、その極限値を、関数 $f(x)$ の $x = a$ における 微分係数 といい、 $f'(a)$ で表す。

- ⑤ 生徒に「既に提示された極限值と平均変化率の定義」と「新たに提示された微分係数の定義」を並べて提示し、それぞれの内容を比較する時間を与える。
- ⑥ 生徒が両者の関連性を確認し、「微分係数の定義」が「平均変化率の極限值」に基づくものであることを自ら確認できるように促す。
- ⑦ 微分係数は「平均変化率 $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ の h を 0 に限りなく近づけた極限值」であることを確認する。
- ⑧ 新しく習う「微分係数」という用語と「 $f'(a)$ 」という表記方法について確認する。
- ⑨ 生徒自身で考えた $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ を用いて、 $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ と表されることを確認する。
- ⑩ 「難しそうに見える定義だが、1 つ 1 つの言葉や数式の意味を確認することで、より簡単に理解できるようになる」ことを強調し伝える。

この流れで微分係数の定義を行う意図は、次の 3 つにある。1 つ目として、生徒自身で考え出した式が数学的な理論に結びついていることを示すことで、学びが単なる受動的なものではなく、自分自身の考えから発展することがあることを実感できる。この体験は、生徒の学習に対する意欲を高めることができると考えられる。2 つ目として、微分係数という新しい用語や表記法を、既に生徒自身で導き出した式と関連付けることで、単なる暗記にとどまらず、既習の学びとのつながりのある理解として定着させることができる。この関連付けによって、新しい学びがより深いものになると考えられる。3 つ目として、数学を学ぶ過程で出会う「難しそう」に見える内容に対しても、1 つ 1 つの言葉や数式の意味を確認しながら読み解くことで、内容をより簡単に理解できるという体験を提供する。このような体験を通じて、生徒に学習に取り組む態度の重要性に気づかせ、今後の学びにも活かせる姿勢を育むきっかけとなると考えられる。今回の授業では、微分係数を求める練習を通して学習内容をさらに深めるとともに、微分の導入の授業が今後の学びにどのようにつながるのかについて伏線回収することを確認し、3 授業目を終了する。

第 5 節 4 授業目 微分係数のまとめと学びのつながり

本授業は、微分の導入における最後の授業として位置付けている。この授業では、3 授業目で学習した微分係数についてさらに深めることを目指す。具体的には、微分係数を求める練習を基に、それをグラフで視覚的に深める中で、微分係数が接線の傾きと等しいことを確認する。また、微分係数を理解することで、これまで「ビュンっと」のような曖昧な表現を「この点における瞬間の傾きは 3 である」といった数学的

に共通の認識に基づいた表現へと置き変えることができるようになる。このように、生徒が微分の単元全体を通じて、グラフの特徴を数学的な数値として求めることの意義を理解できるようにする。この授業では、生徒が学習活動を通じて考えた「グラフの形を伝えるために着目すべき特徴」が今後の学びにどのようなつながっているのかを示し、微分の導入を締めくくる。

本時の目標は、「微分係数の学習を深めることで、グラフの瞬間的な変化を数学的な数値を用いた表現をすることができる」として、グラフの特徴を数学的な数値として表現する意義を理解し、今後の学びにつながる視点を獲得することを目指す。

1. 意味に着目して微分係数を求める

3 授業目で扱った微分係数の定義について復習し、実際に微分係数を求める練習を次の指示のもと行う。

指示 微分係数の練習問題を解く際に意識すること

- ・ 「求めること」自体が目的ではなく、「微分係数を求める練習」を手段として「微分係数とはどのようなものか」について理解を深めることを目的としていること
- ・ 答えを導き出すだけでなく、どのような手順や考えでその答えに至ったのかに着目すること

これは、微分係数の計算過程を通じて、その本質的な意味や役割を理解させ、単なる計算技術に終わらせないためである。そこで、次のような微分係数を求める練習問題を段階的に提示する。ただし、単なる計算にとどまらず、グラフを描いて視覚的に確認しながら求めること指示する。

練習問題

- (1) 関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数を求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = 3x^2$ の $x = 1$ における微分係数を求めよ。
- (3) 関数 $f(x) = x^2$ の $x = a$ における微分係数を求めよ。

解答

(1) 6 (2) 6 (3) $2a$

練習問題の出題意図は次の通りである。

- (1) 単なる定義の式に代入して求めるだけでなく、「 $x = 3$ から $x = 3 + h$ までの平均変化率」の「 h を限りなく 0 に近づけた極限值」として、その意味をグラフを通じて視覚的に確認しながら求めることができるように工夫した。さらに、この微分係数を求める際、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$ という

途中式が必然的に現れる。本来であれば、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h+h^2}{h} =$

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (6+h) = 6$ といった一連の流れで計算操作を行う必要がある。しかし、

微分係数について学習している生徒にとって、途中式から「分子の展開→共通因数でくくる→約分」といった流れを自力で導き出すことは難しいと考えられる。そのため、教師からのヒントや解説が必要になる場合がある。その結果、生徒が「微分係数を求めるためには複雑な途中の計算が必要である」という印象を持ち、計算自体に重点が置かれてしまう可能性がある。一方、本研究で構築した授業展開では、このような計算操作による学習の停止を防ぐため、

生徒たちが、 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h}$ という形の計算を既に練習している状態で望めるような工夫をし

ている。1 授業目で極限値の計算練習の(9)で発展問題として扱った問題(p. 16, 17 参照)は、今回の途中計算の形と全く同じである。工夫点①(p. 9 参照)で述べたように、事前に極限値を学習する時間を設けており、その中で微分係数を求める際に出てくる形を練習として扱っているのである。生徒は既に「分子の展開→共通因数でくくる→約分」といった流れを体験し

ており、この内容が微分係数の計算に直結するように設計されている。

- (2) この問題では、平均変化率の分子に係数 3 が現れることに注意する機会を与え、公式としてではなく、意味理解を伴えるように考えさせる。このように、具体的な関数の例を通じて「微分係数の計算の仕組み」を生徒に体験させることで、理解を確かなものにするを目指す。
- (3) 文字を含む場合も同様に微分係数を求めることができることを確認させる。これにより、生徒は具体的な値だけでなく、文字を用いた一般的な場合にも微分係数が適用できることを理解する。求めた微分係数 $2a$ において、 $a = 3$ のときを考えると、 $2 \times 3 = 6$ となり(1)で求めた微分係数と一致することを確認することができる。さらに、この取り組みは、今後学習する導関数の布石として重要な役割を果たす。文字を含む形で微分係数を扱うことで、生徒は導関数の学習につながる考え方をここで取得することができる。

授業実践では、(1)の途中計算が現れた際、多くの生徒が 1 授業目の発展問題とのつながりに気づき、スムーズに微分係数を求めることができた。一方で、数名の生徒が途中計算で手が止まっている場面も見られた。その際、次のような発言を全体に行い、生徒が既習の内容を想起できるように促す。

この極限値を求めることは、みなさんは既にできるはずです。

この発言をきっかけに、多くの生徒がノートや miro を遡って振り返る姿が見られ、1 授業目の学習を思い出して計算を進めることができた。一部の生徒が既習内容を思い出せない場合には、個別対応を通じてサポートを行った。教師が生徒のノートや miro の記録を振り返りながら、「既に学習済みであること」や「どのような手順で求めたか」について確認した。これにより、生徒の学習が停滞することなく、微分係数の意味を自然に理解できる流れを構築でき、生徒は既習の学びと現在の学びをつなげることができた。

2. GeoGebra で微分係数を視覚化

平均変化率で使用した GeoGebra (付録 3 参照)を再度用いて、次のような指示を通じて、微分係数を視覚的に理解する活動を行う。この活動では、微分係数がグラフ上で「接線の傾き」を表していることを生徒に実感させることを目的としている。ここでは、先ほど学習した練習問題(1)のように「 $y = x^2$ の $x = 3$ における微分係数」について考える流れに沿うように行う。

流れ GeoGebra を用いて微分係数を視覚化

- ① 生徒に以前の平均変化率の学習(付録 3 参照)で使用した GeoGebra に再度移動するよう指示する。
- ② 画面の左にある「数式」に入力されている関数の式を $y = x^2$ に変更し、微分係数の練習問題の(1)と同じ状況を作り出すように指示する。
- ③ a の値を $a = 3$ に固定し、 h の値を $h = 2$ 程度にして 2 点が離れた状態にさせる。この状態は、 $x = 3$ から $x = 5$ までの平均変化率が、2 点を結ぶ直線の傾きを表していることを確認する。
- ④ 生徒に、図 15 のように、 h の値を徐々に 0 に近づけるように指示をする。これは、 h を限りなく 0 に近づける極限値を求めていることを確認する。
- ⑤ この一連の操作は、「 $y = x^2$ の $x = 3$ における平均変化率の極限値」を表していることを確認する。すなわち、「 $y = x^2$ の $x = 3$ における微分係数」でもあることを確認する。
- ⑥ 「2 点を結ぶ直線が、グラフ上でどのようなものを表しているか」を問いかける。
- ⑦ 生徒同士で考えた意見を共有した後、もとのグラフとその直線が「接している」、すなわち、 $y = x^2$ の $x = 3$ における「接線」であることを全体で確認する。
- ⑧ 実際に、GeoGebra を用いて接線の直線の傾きを数値として表示し、練習問題の(1)で求めた微分係数の答えと等しいことを示す。
- ⑨ 「 $x = 3$ における接線の傾きは、 $x = 3$ における微分係数と等しい」という結論を全体で確認する。

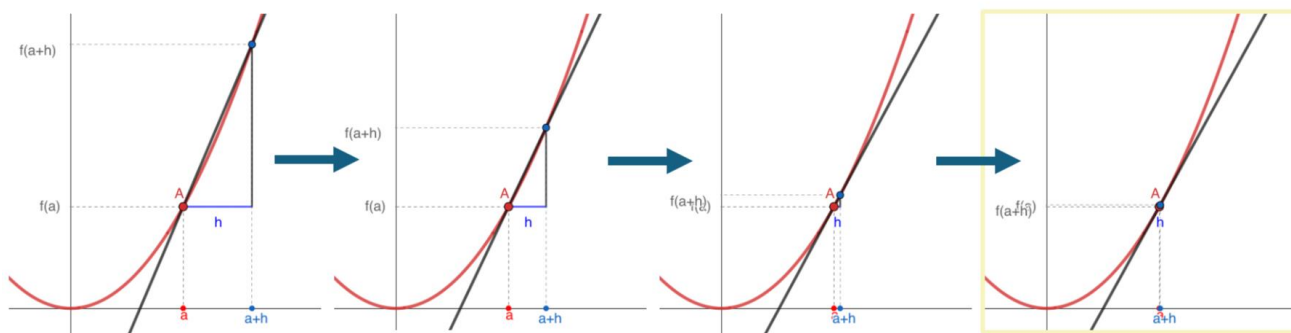


図 15 グラフ上における平均変化率の極限值

この活動では、生徒が計算で求めた微分係数がグラフ上の接線の傾きと一致することを視覚的に確認することで、数式と図形の両方の視点から微分係数について理解を深めることができる。また、 h の値を徐々に小さくする操作を通じて、微分係数が「瞬間的な変化」を表していることを直感的に体験させることができる。この活動を通じて、生徒は微分係数の定義とその数学的意味を具体的に理解し、計算結果がグラフ上でどのような役割を持つかを把握することができる。さらに、動的な操作を通じて生徒が直感的に理解を深めることで、学習に対する意欲を高めることができると考えられる。これにより、「接線の傾き」が、微分係数の学習を深める過程で自然に導き出される内容として位置付けられる。これは前述した工夫点④(p. 10 参照)に基づくものである。生徒が微分係数を深く考察する中で、「接線の傾きと等しい」という結論にたどり着くような流れにし、計算だけでなくその意味や背景を理解できるようにしている。

3. グラフ上の微分係数と接線の傾きに着目

GeoGebra を用いたグラフ上の微分係数について深めた活動をもとに、「ある点における接線の傾きは、その点における微分係数と等しい」ことがわかったことを確認する。このことから、接線の傾きと微分係数について、次のようにまとめることができることを生徒に提示する。

板書

関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(a, f(a))$ における接線の傾きは、関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

このまとめをもとに、次のような問いかけを行う。

問いかけ

グラフ上のある点での接線の傾きは、どのようにすることで求められるか」をペアに伝えてみよう。

この意図は、教師が一方的に「接線の傾きは、微分係数を求めることで分かる」という事実を伝えるのではなく、生徒自身が活動を振り返り得られた結論を自分たちで再確認する機会を与えるためである。これにより、学びが主体的で深いものになると考えられる。生徒それぞれが自分の言葉で答えを考える時間を設けた後、ペアで生徒同士で考えを共有する。「接線の傾きは、微分係数を求めることで分かる」という単純な答えであるが、これを自分自身で考え、言葉にして共有することに意味があると考えられる。これにより、生徒は自分の考えを他者に伝えることで自らの理解を再確認し、整理することができる。ただの暗記や受動的な理解で終わることがないような工夫である。その後、接線の傾きを求める練習問題を提示する。

練習問題

- (1) 関数 $f(x) = x^2$ のグラフ上の点 $(3, 9)$ における接線の傾きを求めよ。
- (2) 関数 $f(x) = x^2$ のグラフ上の点 $(1, 1)$ における接線の傾きを求めよ。

解答 (1) 6 (2) 2

ただし、次のような問いかけを全体に行い、これを考えてから問題に取り組むように指示する。

この問いかけの意図は、生徒が「関数 $f(x) = x^2$ のグラフ上の点(3,9)における接線の傾き」という問題を、「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数」という問題に置き換えることで求めることを促す点にある。このように置き換えることで、求めるべき内容をより明確にし、自分自身で必要な情報をもとに思考する機

問いかけ

(1)は、「何の」関数の、「 $x = \text{何}$ 」における微分係数を求めれば、接線の傾きが求められるのか。

会を与えることを目指している。もとの問題では、接点の座標(3,9)が含まれており、特に、生徒が y 座標9の扱いに戸惑う可能性がある。実際、これまでの数学の学習経験では、多くの場合が与えられた数値をすべて計算に活用する傾向があるため、生徒は「この9を何らかの形で使う必要がある」と考える可能性がある。しかし、一度立ち止まり、微分係数を求めるために「何の関数の、 $x = \text{何}$ に着目するか」を考えることで、実際には y 座標の9が $f(3)$ を表していることに気づくことができる。また、この問いかけによって、「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における微分係数を求める」という問題に置き変えると、既に学習している内容に帰着することがわかる。このように問題を整理し直すことで、生徒は、微分係数の理解を深めるだけでなく、これまでの学びと新しい学びがつながることを実感することができる。

解答を確認後、必要に応じて、以下の内容を生徒に補足的に伝えることで、今後の学びへとつながることをより明確にできる。

補足 接線の方程式へのつながり

「点(3,9)における傾き」と「通る点(3,9)」の2つが分かることから、 $y = ax + b$ に $a = 6, x = 3, y = 9$ を代入し、 b を求めることができる。それにより求められた1次関数 $y = 6x - 9$ は、「関数 $f(x) = x^2$ の $x = 3$ における接線を表す直線のグラフの式」である。

この考えは、後に学習する「接線の方程式」につながる重要なものである。今回の授業で接線の傾きに着目することで、微分係数が接線の性質を捉えるための基盤になることを示し、今後の学びへの布石として位置付けることができる。このように、今後の学習の流れを生徒に伝えることで、生徒は自分たちの学びの全体像を把握し、次の学びに向けた意欲を高めることができると考える。ただし、生徒の理解度や学習進度に応じて、この内容をここで扱うかどうかは柔軟に調整する必要がある。実態に応じて「接線の方程式」を学習する際に改めて復習することでも、十分に学習効果を得られると考える。

4. 今後の学びへのつながり

微分係数を考えることで、瞬間的な変化を数学的な数値として求めることができることを確認する。これまで、「ビュンっと」のような曖昧で人によって認識の異なる表現を用いていたが、微分係数の学習を通じて、共通の認識に基づく数学的な数値で表すことができるようになった。これは、2授業目で生徒自身で考えた「傾き」や「進む向き」、「増加と減少の仕方」といったグラフの特徴が、数学的には「ある点における瞬間の傾き」として「関数の増減」を求めることで表現できると実感できたことによるものである。この学びは、グラフの特徴を理解し、グラフの概形について考えるための基盤を築くものであり、今後の微分の学習における重要な土台となる。以上を踏まえ、次のような流れで今後の学びへのつながりを示す。

流れ 生徒自身で考えた「グラフの特徴」から今後の学習内容へのつながり

① 2 授業目で生徒自身で考えて共有した「グラフの特徴」の付箋を再度提示する。

② 生徒の考えた付箋から、キーワードを取り出したものを提示する。

「傾き，増加と減少，進む方向，点と点のつながり，山と谷，頂点の座標，通る点の座標，グラフの形，対称性，周期性，最大値と最小値，グラフの位置，存在範囲，軸との交点，曲線の膨らみ，下に凸か上に凸か，無限に続くか」

③ 生徒が考えた特徴を内容ごとに分類し，以下のように整理する。

A. 傾き，増加と減少，進む方向，点と点のつながり

B. 山と谷

C. 頂点の座標，通る点の座標

D. グラフの形，対称性，周期性

E. 最大値と最小値

F. グラフの位置

G. 存在範囲，軸との交点

H. 曲線の膨らみ，下に凸か上に凸か

I. 無限に続くか

④ 分類 A については，3～4 授業目で学習した「微分係数」を用いることで，数学的な数値として「関数の増減」を求め，表現できることを確認する。

⑤ 分類 A 以外の他の内容についても，以下のように今後の学習内容と対応することを示し，生徒が今後の学びの流れとつながりを実感できるようにする。

分類 A. 傾き，増加と減少，進む方向，点と点のつながり →関数の増減

分類 B. 山と谷 →極限值

分類 C. 頂点の座標，通る点の座標 →極大値と極小値

分類 D. グラフの形，対称性，周期性 →グラフの概形

分類 E. 最大値と最小値 →関数の最大最小

分類 F. グラフの位置 →方程式への応用

分類 G. 存在範囲，軸との交点 →不等式への応用

分類 H. 曲線の膨らみ，下に凸か上に凸か →第 2 次導関数(数学Ⅲ)

分類 I. 無限に続くか →極限と漸近線(数学Ⅲ)

⑥ miro 上で教科書の関連ページを提示し，各分類がどの学習内容と対応するかを確認する。これにより，生徒が自分たちの考えが今後の学習内容と結びついていることを実感できるようにする。

分類 H, I については，数学Ⅱの学習内容を越えた数学Ⅲで学ぶ内容に関係している。具体的には，分類 H は，グラフの凹凸に着目する第 2 次導関数，分類 I は， x が $\pm\infty$ を目指して進むときのグラフの様子や漸近線について考える内容に対応している。理系で数学Ⅲを学習する生徒に対しては，これらの分類が数学Ⅲの微分法へのつながりとして伝えることで，学びの見通しを持たせることができる。一方で，文系で数学Ⅱまでの学習に留まる生徒に対しては，これらの内容に特に触れず，数学Ⅱの範囲内で完結した学びを提供する方が適切である場合もあると考えられる。このように，生徒の進路や実態に応じて柔軟に対応することで，各生徒に最適な学びの流れを提供することができる。

授業実践では，次の図 16 のように，生徒の付箋に分類のタグをつけ，「学習活動で考えたグラフの特徴」と「微分の単元で学習する内容」のつながりが見えるように提示する。



図 16 miro 上に提示した「学習活動で考えたグラフの特徴と微分の単元で学習する内容のつながり」を表した画像

この提示の意図は、学びのつながりを明確に示すことで、以下の効果を狙ったものである。1 つ目に、生徒が考えた「グラフの特徴」が単なる一時的な活動ではなく、今後の学びに直接結びついていることを示し、学習の連続性や一貫性を実感させること。2 つ目に、グラフの特徴と微分の学習内容を対応させて提示することで、微分全体の学習内容の見通しを生徒に持たせ、今後の学びの方向性を明確にすること。3 つ目に、微分が「グラフの特徴を数学的な数値として捉える」ために活用できることを体験を通じて理解させることで、微分の学習意義を深く認識させること。これらの狙いを通じて、微分の導入を単なる計算手順の習得に終わらせるのではなく、生徒自身で考えたグラフの特徴が微分単元の学習内容そのものと結びついていることを実感し、学びが次の段階へつながるための基盤になっていることを認識することを目指している。この提示を踏まえて、生徒が自身の考えと微分の学習内容のつながりを実感し、今後の学びへの意欲と方向性を持てるように導き、微分の導入として最後の 4 授業目を終了する。

2 授業目の学習活動からこの提示までの流れは、本研究の目的(p. 4 参照)である 2 つの点を意識して設計されたものである。1 つ目は、微分の導入段階で、今後の学びのつながりを明確に示すことで、微分の学びが単発の知識習得にとどまらず、一貫性のある学習の流れを構築することである。この設計によって、生徒は微分の意義を深く理解し、学びを広げていくことができる。2 つ目は、構築した授業の流れを通じて、生徒自身が考えた内容と学習内容が関連していることを可視化することで、活動を通じて得た学びに対する自信を高め、主体的に学習に取り組む態度を養うことである。このような流れにより、学びを生徒自身の経験と結びつけ、学びの意欲を高めることができると考えられる。

以上が授業実践を踏まえた本研究で構築した微分の導入に関する計 4 時間の授業案である。本研究の目的は、微分の導入段階において学びのつながりを明確に示す授業の流れを構築し、生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うことである。本授業では、特に、生徒が自身の考えと今後の学習内容のつながりを実感できるような設計を意識し、微分が数学的な数値を用いてグラフの特徴を捉えるために活用できることを学習活動を通じて体験させることを目指した。次章では、これらの実践を通じて得られた成果とその課題を整理し、今後の展望について述べる。

第4章 本研究の成果と展望

本章では、「学びのつながり」を重視した微分の導入の授業実践を踏まえた評価を行い、本研究の成果と今後の課題について述べる。まず、第1節では、本研究の目的達成を3つの指標(p.4 参照)を基に評価し、授業実践を通じて得られた成果と課題を整理する。第2節では、第1節で明らかになった成果と課題について検討し、本研究が持つ教育的意義や影響について考察するとともに、今後の展望を示す。

第1節 目的達成に対する評価から本研究の考察

本稿では、目的を達成したかどうかを評価するために3つの指標(p.4 参照)を設定した。これらの指標に基づき、本研究で構築した授業について評価を行う。

指標Ⅰ「学びのつながりを示せるような有用性のある授業であるか」について、構築した授業の流れおよび学習活動が、学びのつながりを明確に示し、導入授業として有用性を持つかどうかを評価するために、インタビュー調査を実施し、高等学校の数学科教師(7名)からの評価を分析した。インタビュー調査では、授業の流れや活動をまとめたスライド、および授業中の生徒の意見や考えを整理したリストを提示した上で、概要を説明し、意見を伺った。その結果、授業の流れおよび学習活動に関する評価として、次のような5つの良い点と6つの改善すべき点が明らかになった。(参考資料(5)参照)

- ① 生徒自身で既習の学びのつながりを踏まえて、微分係数の定義を作ることができる
- ② 微分の導入の最後で微分係数を深めることで、生徒に微分の学習での基盤を的確に伝えられる
- ③ グラフの形を伝える活動を通して、生徒が関心を高め、微分の意義を実感できる
- ④ ICTを使うことで、生徒が自分で接線の傾きに気づくことができる
- ⑤ 最後の提示によって、学びのつながりを明示でき、生徒が微分の学習内容を見通すことができる
- ⑥ 授業数・時間がかかりすぎる
- ⑦ 生徒自身で学びのつながりをさらに実感するような工夫を取り入れる
- ⑧ その後の学習内容において一部アフターフォローが必要
- ⑨ 定着と理解のバランスの検討
- ⑩ ICTを多用する授業として、ICTを活用することに対する懸念
- ⑪ 導入授業のまとまりについて、どこまでが一括りかを生徒に明確に伝える

良かった点として、学びのつながりを生徒に示すことができることと、今後の学習内容の全体像を見通すことができることという2つに着目する。授業構築において意図した学習の流れにおけるつながりについて、高い評価を得ることができた。特に、工夫点①および③(p.9,10 参照)のように、平均変化率から微分係数への流れを再構築し、生徒の視覚的な疑問から微分係数を定義するアプローチによって、既習の学びが新しい学びにつながることを的確に伝えることができた。これにより、形式的な指導を克服し、生徒にとって自然な流れでの学習を実現することができた。また、授業の最後に行った提示(図16 参照)によって、今後の学習内容とのつながりを示すことができ、微分全体の学びを見通すことができるようになる点も評価された。実際、「そのあと授業していても、すんなりこの微分係数が傾きになるよねっていうのは生徒たち理解をしてくれたし、その後の導関数、そして公式を用いた微分においてもやりやすかったかなという風に思います。」といった授業実践後に担当の数学科教師の授業が再開した際の生徒の様子からも、授業の有用性が裏付けられた。導入の授業として、微分の学習内容を全体像として提示する役割を十分に果たしていることが確認された。

一方で、次の6つのような改善すべき点が挙げられており、これを踏まえた授業改善が求められる。まず、⑥の授業時間がかかりすぎるという点についてである。授業実践は計4時間にわたって行われた。本

来、この範囲は3時間以内に終わらせることが求められるが、学習活動を取り入れる時間と生徒自身で気づくことを重視した授業の流れが影響し、3時間を超える形になった。この結果から、本授業を学校で実際に実施するためには、大幅な時間短縮が必要であると明らかになった。これは、単に時間を削減するだけではなく、生徒の主体的な学びを損なうことなく、活動の効率化や指導方法の最適化を図る必要があるという重要な改善課題を示している。研究のための特別な授業としては、十分な成果が得られる可能性はあるが、実際の学校で活用し、再現可能な授業として成立させるためには、授業時間数の削減を見据えた再設計が不可欠である。具体的には、学習活動の取捨選択や生徒が学びに気づく過程を効率的にする支援を考える必要がある。次に、⑦の生徒自身でより学びのつながりを実感できる活動を取り入れる点である。2授業目で生徒が捉えたグラフの特徴について、4授業目の最後で「教師」が分類し、まとめたものを提示した。これは、授業進行を円滑にするためであったが、「生徒自身」が特徴を分類する活動を取り入れることで、学びがより深まり、主体的な理解が促進する可能性があると考えられる。このような活動を通じて、生徒がグラフの特徴を多角的に捉えることができ、今後の学びとのつながりをより明確に示すことができる。また、生徒同士だけでなく、教師と生徒が対話を通じて学びを深める時間をさらに設けることで、学習内容の調整や生徒の理解を深めることができると考えられる。一方で、前述したように時間の超過が課題として挙げられているため、授業全体の効率化と時間配分のバランスを検討する必要がある。次に、⑧の後の学習でのアフターフォローの必要性についても懸念された。授業実践では、学習活動を通じて、グラフの形からその特徴を捉えるような流れを構築している。しかし、その後の学習内容であるグラフの増減に関する学習においては、教科書では「関数を微分し、それが正であればグラフは増加する」といった形で説明されている。一方で、本授業では、「グラフが増加しているから、微分係数(すなわち接線の傾き)が正である」といった逆向きの流れに捉えることができる。この違いにより、生徒が混乱する可能性が懸念された。これを解消するには、この内容が必要十分であるかを検討した上で、グラフの増減の学習を行う際には、教科書の説明と授業実践の流れを統合し、両者の内容を確認することで、生徒が一貫性を持って理解できるようにする工夫が求められる。さらに、⑨の定着と理解といういずれの観点からも改善する必要があることが指摘された。授業実践では、生徒自身で定義を考えることで意味理解を伴った定着をすることを意図した授業構築を行った。このアプローチにより、単なる暗記でなく、意味や背景を理解した上で学習内容を定着することができると考えた。しかし、実際の学校では、学校の実態や生徒の理解度に応じて学習活動を柔軟に調整する必要があることが明らかになった。理系クラスでは自由度の高い学習活動が生徒の気づきを促進する可能性が高い一方で、文系クラスでは数学に苦手意識を持つ生徒も多く、自由度がかえって学習を妨げる可能性があることが指摘されている。このような学校の状況を踏まえ、学習活動をクラスや生徒の背景に応じて調整することが求められる。また、⑩のICTを活用する授業に対する意見も見られた。本研究では、ICTを活用することで生徒の主体的な活動を促進し、それによって学びが深まると考え、ICTを手段として活用した授業構築を行った。ICTを活用することで授業がより効果的になる部分があると考え、指導の幅を広げるために様々な手法について自身で学習を進めているため、ICT活用では特に困ることなく実践することができた。しかし、学校の実態として、ICTを活用しない教師が一定数存在していることがわかった。その背景には、ICTの技術的な難しさや活用の経験不足、さらには授業スタイルや教育観の違いなど、様々な要因があると考えられる。そのため、本授業のようなICTを前提とした指導を一律に推奨することは難しい側面があると考えられる。こうした学校の多様性を踏まえて、ICTを活用しない教員でもアレンジ可能な形で授業を活用できるような柔軟な方法を提案することが重要である。最後に、授業のまとまりについて、生徒がより授業の流れを実感できるような伝え方の改善点も挙げられた。本研究で構築した授業の流れは、「微分の導入」について計4時間にわたる1つのまとまりのある授業として設計され、高等学校数学Ⅱの微分の学習の導入として位置付けられていた。しか

し、生徒がその「微分の導入」という1つのまとまりを明確に理解できたと考えられるのは、最後の提示を行い、2授業目の考えがその後の学習内容に関連していることを伝えた際である。1～4授業目が一括りであるということを十分に伝えられていなかったことが原因である。そのため、1授業目の最初に、「ここからの4時間の授業が微分全体の学習につながる一連の流れである」ことを明確に生徒に伝える必要があると考えられる。授業全体の構造や意図を導入の初めに共有することで、生徒が各授業の位置付けを把握でき、今どのような学習をしているかを実感することができる。

インタビュー調査を通じて、以上のような授業の流れおよび学習活動に関する評価が得られた。このように得られた知見は、本授業の有用性を確認するとともに、今後の改善に向けた具体的な指針を示すものとなった。

指標Ⅱ「生徒が学びのつながりを認識することができるか」について評価するため、生徒への事後アンケート調査を実施し、その結果を分析した。アンケートでは、授業における教師の意図を事前に生徒に示した上で、授業を通じて学びのつながりを実感したかどうか、またそれにより理解が深まったのかについて調査した。具体的には、以下の質問に対して、1「全く感じなかった」～5「かなり感じた」の5段階評価を用いて回答を収集した。本調査では2クラス(52名)の回答を集計し、分析結果を以下にまとめた。質問項目は、質問1「4回の授業を通して、『学びのつながり』を感じましたか?」、質問2「『学びのつながり』を感じたことで、学習内容をより深く理解できたと感じましたか?」、質問3「第3回の授業で GeoGebra を用いて『平均変化率を自由に動かす活動』において、『 $h=0$ で直線が消える瞬間の対処法を考える』ときに、第1回の授業で学習した『極限值(h を限りなく0に近づける)]とのつながりを感じましたか?」、質問4「『 $h=0$ で直線が消える瞬間の対処法を考える活動』を通して、自分たちで『平均変化率の極限值』を導き出したことで、『微分係数』を理解しやすくなったと感じましたか?」、質問5「最後に提示したものの(付箋と今後の授業のつながり)が、その後の微分の学習内容につながっていると感じましたか?」、質問6「最後に提示したものの(付箋と今後の授業のつながり)を用いてつながりを示すことで、その後の微分の学習内容を理解しやすくなったと感じましたか?」の6つである。回答を集計した結果が、次の表4である。

質問項目	1 全く感じなかった	2	3	4	5 かなり感じた
質問1	0% (0人)	5.8% (3人)	19.2% (10人)	42.3% (22人)	32.7% (17人)
質問2	0% (0人)	3.8% (2人)	23.1% (12人)	46.2% (24人)	26.9% (14人)
質問3	0% (0人)	3.8% (2人)	30.8% (16人)	38.5% (20人)	26.9% (14人)
質問4	0% (0人)	7.7% (4人)	25.0% (13人)	38.5% (20人)	28.8% (15人)
質問5	1.9% (1人)	7.7% (4人)	21.2% (11人)	40.4% (21人)	28.8% (15人)
質問6	0% (0人)	7.7% (4人)	36.5% (19人)	30.8% (16人)	25.0% (13人)

表4 事後アンケート結果

この結果から、次のような傾向と課題が読み取れる。アンケート結果から、多くの生徒が授業を通じて学びのつながりを実感し、それが学習内容の理解を深める助けとなっていることが分かった。質問1～4では、授業内での学びのつながりを感じた生徒が多く、特に1授業目の極限値の学習と3授業目の平均変化率を結びつけた活動が、生徒にとって自然な理解につながっていることが示された。また、質問5・6では、授業後の学びとの関連を感じた生徒が多いことも確認された。しかしながら、本調査では授業前後の比較が行われておらず、生徒の認識や理解の変化が授業実践によるものかを正確に評価することは難しいことが読み取れる。さらに、生徒の回答は主観的な評価に基づいているため、アンケート結果だけ

では学びの深まりやつながりを客観的に測定することができないという課題があることが分かった。今後は、授業前後の認識変化を評価することができるように行い、生徒の変化をより正確に測定する必要がある。また、アンケートに加え、生徒の発言や成果物を分析することで、学びのつながりの実感を客観的に捉える方法を検討する必要がある。授業を通じて学びのつながりを多くの生徒が実感したが、授業の効果を正確に評価するためには、授業前後の比較や客観的なデータ分析が必要である。これにより、さらなる授業改善が可能になると考えられる。

指標Ⅲ「生徒が主体的に学習に取り組めるようになるか」について、構築した授業の流れを通じて、生徒が学びのつながりを認識し、主体的に学習に取り組む態度を養うことができるかを評価するために、数学科教師へのインタビュー調査を実施し分析した。調査方法は指標Ⅰと同様である。その結果、生徒が主体的に学習に取り組めるようになるかについて、次のような考察が挙げられた(参考資料(6)参照)。

- ① 学びのつながりが明確にあることで、生徒の学習に対する意欲が高められる
- ② 他者との交流や共有があることで、個人での学びを促進することができる
- ③ 生徒自身の気づきから学びを深めることで、生徒が主体的に取り組むことができる
- ④ 短時間での授業では、変化が十分に読み取れない

インタビュー調査の結果から、構築した授業は生徒が主体的に学習に取り組む態度を養う点においてはきっかけとして有効であると評価できる。生徒が学びのつながりを認識できるような活動を行うことで、学習意欲を高めることが評価された。具体的には、生徒自身で微分係数の定義を導き出す活動において、既習の学びと新しい学びがつながることで、学びの面白さや意欲的な態度を引き出すことができるという点である。また、他者との交流を含む活動は、生徒個人の主体的な学びを促進する重要な要素になると考えられる。他者とのコミュニケーションが生徒の学びに新たな視点や発見をもたらし、個人の学びを広げることができる。こうした機会は、生徒が主体的に学習に取り組むきっかけを提供し、特に、学習に苦手意識を持つ生徒にとっても積極的に取り組みやすい環境を作っていると考えられる。さらに、生徒自身の気づきから学びが発展する活動は、生徒の主体性を高めることができると考えられる。生徒が視覚的に不思議な体験をする中で生まれる疑問を解決する活動を通じて、生徒が自発的に学習に取り組むことができる。このように、授業における様々な場面を通じて、生徒に学びのつながりと主体的に学ぶことができる機会を提供することで、主体的に学習に取り組む態度を養うきっかけを与えられると考えられる。一方で、短期間の授業では主体的な学習態度の変化を十分に把握することが難しいという課題も指摘された。主体的な態度の育成には時間がかかるため、短期間の観察ではその全体像を捉えることはできない。このため、長期的な視点での評価や継続的な活動の実施が必要であり、それにより授業の効果を正確に評価することが可能になる。

以上の点を踏まえると、構築した授業は生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うきっかけとして有効であると評価できる。ただし、その効果を最大限に引き出すためには、このような活動を継続的に実施し、長期的な視点から生徒の主体性の変化を正確に評価する工夫が必要である。これにより、授業のさらなる改善と発展が期待される。

第2節 本研究の成果と今後の展望

本研究は、以下の2つの目的を達成することを目指して実施された。目的①：微分の導入において、学びのつながりを明示できるような授業の流れを構築する。目的②：構築した授業の流れにより、生徒が主体的に学習に取り組む態度を養うことができるか検証する。

これらの目的に基づき、以下の成果を得ることができた。第一に、目的①に関連して、本研究で構築し

た授業の流れは、微分の導入において「学びのつながり」を明確に示す上で有用であることが示された。具体的には、生徒がグラフの形を言葉だけで伝える活動を通じて、グラフの特徴に着目し、それが今後の微分の学習内容に自然につながるような流れを実現した。このアプローチにより、生徒は微分の学習内容全体に見通しを持つことができ、導入授業として高い効果を発揮した。また、平均変化率から微分係数への流れを再構築する際に、生徒の視覚的な疑問を起点として微分係数を定義する流れを導入したことで、既習の学びと新しい学びを生徒自身が結びつけることのできる経験を提供することができた。これにより、生徒は単発的な学習の理解にとどまらず、学びのつながりを実感できるようになった点が評価される。第二に、目的②に関連して、本研究の授業が生徒の主体的な学びの態度を養うきっかけを与える点において有効であることが示された。構築した授業は、生徒が「学びのつながり」を認識し、それを通じて学習意欲を高める活動として評価された。特に、グラフの形を言葉だけで伝える活動では、生徒は曖昧な表現だけでは的確に伝えることが難しいという経験を通して、どうすれば伝えられるかという動機づけを行うことができた。それにより、生徒が数学的な数値の表現の必要性を実感し、意欲的な態度を引き出す効果について評価された。また、視覚的な不思議さを体験し、それを解決するために既習の学びをつなげる活動を通じて生徒自身の気づきを促し、学びを深めるきっかけを提供できた。これにより、数学に対して学習に苦手意識を持つ生徒にも積極的に取り組みやすい環境を整えた点が、本授業の成果といえる。

以上の結果から、本研究で構築した授業の流れと学習活動は、単に知識・技能の習得を目的とした形式的なものではなく、生徒が学びのつながりを認識し、主体的に学習に取り組む態度を養うきっかけを与える点で効果的であることが明らかとなった。

本研究の成果と改善すべき点を踏まえ、今後の展望として、以下の4つの方向性に基づく改良と発展が求められる。第一に、授業時間数削減を見据えた効率化の追求である。授業実践では、生徒が学びのつながりを実感し、主体的に活動できる時間を確保するために4時間を要したが、学校での現実的な活用を考慮すれば、時間配分の効率化が課題として挙げられる。活動の効率化を行い、生徒の学びを損なわずに短時間で効果を上げられる構成を再設計する必要がある。また、生徒が学びのつながりをより実感できるような活動の流れや教材の活用をさらに進めることで、生徒の思考や発見を促進しながらも授業全体の効率化を図ることができる。たとえば、生徒自身でグラフの特徴を分類する活動を取り入れ、生徒同士および教師との対話を通して学びを深める機会を提供するような流れに再設計することが考えられる。第二に、多くの教師がICTを柔軟に活用できる方法の模索である。本研究はICTの活用自体は目的ではないが、活用することで学びが深まることが明らかになった。本研究ではICTを効果的に活用できたが、学校におけるICTの使用状況にはばらつきがあることが課題として浮き彫りになった。そのため、ICTを活用しない教師にも対応可能な指導案の提案が必要である。具体的には、ICTを活用した指導と紙媒体や黒板を利用した指導が相互に補完できるような形で、授業活動を設計することが求められる。さらに、ICTの活用方法に関する資料や支援のような柔軟な対応を整備することで、ICTを活用しない教師にも活用の工夫や指導の改善に役立つヒントを提供できるようになると考える。第三に、客観的評価の導入である。本調査では、授業前後の比較や客観的なデータ分析が不十分であり、授業の効果を正確に評価することが難しいという課題が明らかになった。今後は、授業前後の認識変化を測定するための調査方法や、アンケート結果を補強する生徒の発言や成果物の分析を取り入れるべきである。たとえば、ペアで着目したグラフの特徴を分類する活動を取り入れ、その中で学びの深まりを定量的に測定するフレームワークの構築が考えられる。また、学習の継続的な効果を測定するための定期的な調査も併せて実施するべきである。第四に、長期的な視点での評価の必要性である。短期間の授業実践では、主体的な学習の態度の変化を十分に把握することが難しいため、長期的な評価が必要である。そのため、数か月単位での継続的な活動を組み込み、その効果を観察・評価する枠組みを導入することが求められる。これにより、生徒の主体的に学習に取り組む態度が養われているかより具体的に検証することが可能となると考える。これらの改良

を進めることで、数学科教育で再現可能かつ実用的な指導法を確立し、生徒一人ひとりが主体的に学習に取り組む態度を養う授業を実現できると考えられる。今後も研究と実践を継続し、本研究の成果を高等学校数学科教育に還元することで、生徒一人ひとりが学びに向き合えることのできる授業の実現を目指していく。

参考文献

- 1) 金田一春彦・金田一秀穂(2017)『現代新国語辞典 改訂第六版』. 株式会社学研プラス. 441
- 2) 文部科学省. “学習指導要領とは何か?”. 文部科学省ホームページ. 2011-02, https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/new-cs/idea/1304372.htm, (参照 2024. 11. 26)
- 3) 文部科学省(2018). 『高等学校学習指導要領(平成 30 年告示)解説 数学編 理数編』. 学校図書.
- 4) 坂井和裕(2020). 高等学校微積分指導に関する一考察 -微分の概念を習得する教材について-. 朝日大学教職センター研究報告, (22), 71-76.
- 5) 山口昌広(2014). 高等学校数学Ⅱにおける微分学習の指導改善に関する研究 -微分することの意味理解に着目して-. 上越数学教育研究, 第 29 号, 77-84.
- 6) 須崎英樹(1991). 微分積分における基礎的概念の学習のあり方についての一考察. 兵庫県立教育研究所研究紀要, 第 102 集, 59-70.
- 7) 岡部恒治ほか(2024). 『NEXT 数学Ⅱ』(2021 年 3 月 1 日検定済). 数研出版株式会社. 206-233.
- 8) 文部科学省(2017). 『中学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説 数学編』. 日本文教出版. 118.
- 9) 大蔵陽一(2016). 『大学数学ほんとうに必要なのは「集合」』. ベレ出版. 33-35.
- 10) 木村一輝. “数学における公式, 定理とは? 違いは何か”. 趣味の大学数学. 2020-12-26. <https://math-fun.net/20201226/8019/>, (参照 2024. 12. 08)
- 11) miro. “オンラインホワイトボードツール”. Miro. 2025, <https://miro.com/ja/online-whiteboard/>, (参照 2024. 12. 10)
- 12) GeoGebra. “GeoGebra のツールと教材”. GeoGebra .2025, <https://www.geogebra.org/?lang=ja>, (参照 2024. 12. 10)
- 13) miro. “内部と外部のリンク”. Miro, <https://help.miro.com/hc/ja/articles/360017572354-内部と外部のリンク>, (参照 2024. 12. 10)
- 14) GeoGebra. “GeoGebra Classroom を学ぶ”. GeoGebra. 2025, <https://www.geogebra.org/m/y32vewsk>, (参照 2024. 12. 10)

参考資料

参考資料(1) 普段の授業についての数学科教師へのインタビュー調査結果

該当番号の具体的な発言の一部例示である。発言に文脈上補足が必要な場合は、()内に記す。

1	「基本的にこれ(教科書)通りに進めるかな。」
	「(教科書の)全部の問題は扱わず、ピックアップして話したりしているの。」
	「(導入として、車の)スピードとかの話をするんですけど、そこからは(教科書に沿って)そのままですかね。」
2	「(定義の詳しい意味については)教えてはいるんだけど、さらっと流しちゃう。」
	「微分の計算公式っていうところをさせるように行っちゃいましたね。」
	「まずは(生徒が)微分できるようになることに重点を置いているような気がします。」
	「(教科書で定義を確認して)単なる計算だけを(生徒に)させるとか。」
3	「この(極限值や微分係数の定義)概念ってわかりにくいから、結局は教授型に。」
	「以前はですね、定期考査とかでも記述で『定義にしたがって微分せよ』とかを出した。今は小テストで問うことはあるくらい。」
4	「(定義にしたがって求める問題は)飛ばしたと思います。点数を取らせる問題(計算問題)などにフォーカスをおいて。」
	「さらっと(計算練習中心)で、2時間くらいですね。」
	「3時間あったら余裕ですね。」
	「(微分係数の次の接線の傾きは、接線の方程式とまとめて後に扱うから、導入では飛ばして)1.5時間くらいで行く。」
5	「1時間1ページとして、3時間くらいですね。」
	「(生徒は)とりあえず定義を覚えてって感じかな。」
	「(微分の意味を)全く分かってないけど、計算はできる子はある。」
	「(微分について生徒に聞くと、指数の部分が)前に降りてくるんだの公式しか多分出てこないんじゃない。」
6	「(数Ⅲの学習で)なんで sin が cos になるかがわからないことがある。結局、覚えるとか暗記とかになってしまう。」
	「『なんで微分するの』って言われたらちょっとうってなってしまう(生徒はいると思う)。」「微分して増減表かけばグラフができると(理解はしている)。でも、『なんで微分したらグラフができるの。』って言われたときに(生徒が)説明できるかという、ちょっと難しいかもしれない。」

参考資料(2) 授業時間数の制約についての発言

発言に文脈上補足が必要な場合は、()内に記す。

「(学習内容を理解するには)定義が必要だとか、細かくというのを、導入のところでは、ある意味念入りにやりたいという気持ちはありますか。時間があれば。」
「早いペースで進めないと(授業数が足りない)。」
「昔は、(導入において、)ミサイルの軌道をわかりやすくするために微分って作られたよとかを取り入れてたんですけど。実際は、そんな緩く(授業を進めることが)できないんですよね。」
「(物理とか化学との)教科横断的部分みたいな、Well-being みたいなのができればなっていうのは、漠

然とだけ思ったことがありますね。でも、時間がないんですよね。現場でやってみてそれ(時間が足りないこと)を感じる。」

「先生たちの打ち合わせの時間もないから、それ(授業ペースを合わせるとか)が大変。時間がもっとゆとりがあるといい。」

参考資料(3) 3つの指標の評価方法

指標Ⅰの評価方法

＜対象＞ 研究協力校である熊本県内高等学校の数学科の教師

＜方法＞ インタビュー調査(授業の流れおよび活動をまとめたスライドと授業中の生徒の意見や考えをまとめたリストを提示し、概要を説明後、インタビューを行う)

＜内容＞

- ・学びのつながりを示せるような有用性のある活動であると感じるか
- ・本研究で構築した特有の要素によって、学びのつながりを明確に示せていると感じるか
- ・活動での生徒の気づきが、今後の学習につながるものであると感じるか
- ・実際の学校で再現可能か、実践したいか
- ・構築した授業に対する評価(良い点、改善点、感想)

指標Ⅱの評価方法

＜対象＞ 授業実践を行った2クラス

＜方法＞ オンラインフォームを使用したアンケート調査(授業の意図を明示した上で、1～5の選択方式で集計する)

＜内容＞

- ・学習内容同士のつながりを感じたか
- ・つながりを明確にしたことによって、学習内容を理解しやすくなったと感じたか
- ・学習活動が、4時間の授業後の授業につながっていたと感じたか
- ・学習活動をしたことによって、微分の学習内容を理解しやすくなったと感じたか

指標Ⅲの評価方法

＜対象＞ 研究協力校である熊本県内高等学校の数学科の教師

＜方法＞ 指標Ⅰに基づく評価と同様にアンケート調査を実施

＜内容＞

- ・本研究の授業を通して、生徒の学びに対する意欲を高めることができると感じるか
- ・本研究の授業を通して、生徒の主体的に学習に取り組む態度を養うことができると感じるか

参考資料(4) 生徒が付箋で共有した「着目する必要があるグラフの特徴」

1つの付箋で書かれたものを1つのまとまりとして記載。

理系Aクラス(ペアで1枚の付箋を作成)

原点を通るかどうかわ、無限に続くか
原点を通るか、どこの象限にあるのか、やまがくる座標
曲線の膨らみの大きさ
頂点の座標
どこの象限にあるか、頂点の座標
頂点の符号、y座標の最大値・最小値、わかりやすい点の座標、原点を通るか否か、点対象・線対象に

なっているか、上に凸か下に凸か
グラフの形を具体的に伝える
山のなだらかさ、第なん象限にあるか
原点を通るか通らないか
直線か曲線か
x が何のときに y が0になるのか
原点を通る
どの場所にグラフがあるか、原点、山、わかりやすい座標
原点を通るか、直線か曲線か、○軸に対して対象か
傾きの大きさ
グラフの座標、象限の場所
グラフ全体の形を見て伝える、原点に近づく
x 軸と y 軸でどこを通るかを伝える
第何象限か
頂点の座標

文系Bクラス(個人で1枚の付箋を作成後、ペアで共有し、修正の時間を設けた)

順
グラフの種類、軸とグラフの位置関係、周期、各軸の上限下限
最初と最後の座標、最大値最小値
通る点
通る点、形、向き
場所
通る点の順番
どの順に点を通るか
線はどのように通るのか
線がどのように通るのか
直線か放物線か
直線なのか放物線なのか
挑戦か放物線か
放物線か直線かを伝える
どんな範囲の関数か
円は関数ではない
関数は決まった形だけではない、いろんな不規則な形がある
どんな関数か伝える
原点を通るのか、 x 軸、 y 軸どこで交わるのか、下に凸か上に凸か
直線なのか曲線なのか、原点を通るのか、 x 軸や y 軸との交点、頂点はあるのか
y 軸、 x 軸との交点の座標、原点の位置
x 、 y の座標
第何象限にあるか、 y 軸のどこ、 x 軸のどこを通るか

y軸に対して線対象になっているか、特定の範囲に収まるグラフなのか、y軸、x軸との共有点
原点を通る、Nの形に似ているか、第何象限にあるか
数字、どんな感じのグラフか、マイナス、プラスはどちらか、原点を通っているか
原点通るか、対象か、何象限を通るか
原点を通過するか、プラス、マイナスどちらなのか、どのような形なのか
どこを通るのか
全体的にどんな形をしているのか
どの象限を通るか、原点を通るか、似ている関数はなにか、xy軸のどの点を通るか
原点を通るか、どのような形か(直線、曲線)、どこ点を通るか、習ったことがある関数か
どの順で点を通るのか、どこで曲線になるのか
どんな形か、軸の上にある点、直線か曲線か
点と点のつながり方、放物線か直線か
通る点、座標、どんな形か(下に凸、直線)
グラフが通る点、どんな方向に進んでいくのか、原点は通るのか
点と点の間隔、プラスかマイナス、カーブ、直線がどの方向にむいているか
下に凸が何個あるか、点のつながりかた
点をどのように通るのか
どの点を通るか
原点を通るか
原点通るのか、放物線なのか
増加と減少の仕方
最小値と最大値
グラフの形
範囲 $0 < x < 6$ とか
x, yの範囲
相手に伝えようとする気持ち
どの点をどのように通り、似ているグラフはなにか
原点の座標、何回曲線が続くか、どんな形か

参考資料(5) 指標Ⅰについての数学科教師へのインタビュー調査結果

該当番号の具体的な発言の一部例示である。発言に文脈上補足が必要な場合は、()内に記す。

1	「(従来の授業では)平均変化率やって極限值やるけど、生徒からすると全くその2つはつながりがない。(この授業では)あえて、そこを最初に極限值を持ってくるというね。」
	「こういう風(極限值を先に学習する)にしていけば、こう自分でわかるっていうのがやっぱり非常に大事だからね。非常にうまく考えられた授業形態だなと思いました。」
	「面白いね。これすごい。生徒が自分で微分係数の定義を作れるっていうのがね。」
2	「(微分の導入における)教科書のゴールがここ(接線の傾き)なのに対して、微分係数に着目するっていうところが大事なんだ。自分もそういうふうに思いました。」
	「(微分の導入において)微分係数に着目するって、すげえ大事なんだなって思うんですよね。あくまで、接線の傾きって接線を求めるための道具でしかなくて、(中略)接線の傾きが主役なんですからって言われると、生徒は困惑すると思うので、先生のつくられる形(授業の流れ)が面白いなって思

	う。」
	「(微分では)グラフの形を捉えるっていうのがすごい大事な部分ですもんね。本当に学びのつながりがあるような授業だと思います。」
	「(生徒が)グラフの説明とかなかなか伝わらないってなったら、きちんと伝える方法を知りたいってなって、動機づけになるので。その方法ってなんだろうっていうところでつながってくる。」
	「教科書通り教員が一方的に喋るっていうよりは、これでやっていけば、自分たちが描いたグラフから接線の傾きとかグラフの変化とか、そういうのが見えてくるっていういいよね。」
3	「生徒に(グラフの形を)説明させて、その情報(曖昧な表現)だけじゃ伝わらんよね。だから、数学って微分して増減表作ってっていうのをやることにつながると思うんですよね。(この授業なら)そういう発想させることができる。」
	「その部分(グラフを自由に生徒に作成させて)だけを取り入れて(グラフの増減を知るには極値が必要とかを気づかせて)、増減表とかやってもいいかもしれん。」
	「GeoGebra を使って色々な関数を考えさせるとか、発表させるとかっていうのは、数学的な視点を養うためにとか興味関心を高めるためには、ぜひやってみたい。」
4	「本当はそこ(微分係数が接線の傾きと等しい)が生徒に気づかせるってことが 1 番大事だけね。これだけ丁寧にやれば、生徒は気づくかなと思う。」
	「生徒が自分で接線の傾きっていうのを自分でだせるっていう (ICT を使った活動である)のは、やっぱり非常にいいよね。」
5	「微分全体を見渡すっていう上で、これ(最後の提示)はわかりやすいかなと思うんですよね。」
	「視覚的とか数学的な見通しとか、興味関心とか微分の真の意味であるとかを、生徒がきちんと理解した上で、授業を進めていけるところ。」
	「学びのつながりはすごく示せたのかなと思います。そのあと授業していても、すんなりこの微分係数が傾きになるよねっていうのは生徒たち理解をしてくれたし、その後の導関数、そして公式を用いた微分においてもやりやすかったかなという風に思います。」
6	「再現的などところでいくと、単位数的などところ(が不安)。どこまで時間を取れるか。」
	「(計 4 時間の授業であるから)あと 2 時間分くらいは削らないといけない。どこを削るかってなったら、生徒の活動を減らすしかないですもんね。面白いところだけ残すと、つながらないでしょ。短くてもやるべきなのか。活動を 2 分の 1 とか、半分にして 2 時間するとしたら可能かどうか。」
	「授業数は減らしてコンパクトに。」
	「時間との問題がある。ここだけにあんま時間を費やすとね。ここは 2 時間か 3 時間もかけたくないぐらいだからね。」
	「再現可能か不可能かってどっちかって言われると、今の現状では不可能に近いですよ。その(授業時間を)半分に減らさないといけない時間になっちゃうから。」
7	「(最後の提示について)もっと時間があれば、生徒で miro とかで付箋出したのを、カテゴリーに分けたりとかまですると面白いけど。生徒同士で分類とかができるっていうのが、究極の目標かもね。」
	「(最後の提示について)先生が言うんじゃないくて、今日はここだ、これをしたよねみたいなまとめを(生徒に)言わせてもいいのかなって感じた。」
	「(授業の中に学びのつながりがあったことを)あえて(生徒に)聞いちゃう。そう言うのをすると面白いのかなって思った。」

	「もう少し解く時間を与えてあげたり、生徒と(教師が)会話しながら深めさせたりと言うような時間はあっても良かったかなと思う。」
8	「(グラフの増減の学習において)微分したものが正だったら増加するって学習する。(しかし、この授業では、流れ的に)増加しているから微分係数が増してるみたいな感じ。ちょっと順番が逆にならざるを得んというね。グラフを先にやって、微分係数っていうのを定義してしまうのでは。そこは、ここ(グラフの増減の学習)をやるときに、しっかりアフターフォローしてやった方がいいかも。」
9	「(この授業は)2 頭を得て 2 頭を得ようとしているわけよね。自分で生徒から考えさせて、うまく導き出せて、しかもそれが定着するっていうのが理想。(中略)今の高校生の在り方で、最終的な目標は、今の現場では定着だと思うんですよ。時間をかけてやれば定着がうまくいくかっていうと、実はそうでもなかったりするし、難しいなってっていうのが、現場の答えで。」
	「先生がされた授業っていうのは、ものすごく「おーなるほど。」って僕ら(数学の教師)はわかるじゃないですか。ある程度、最後(微分の学習全体)まで想像できて。生徒にとっては、授業の断片的なところを見て、部分部分消えているような感じはする。「授業がわかった＝定着」ではない。」
	「(グラフの作成においては、)理系は全然フリーでいいんじゃないですか。色々使ってごらん。っていうところでいっぱい気づきは出てくるし。(ただ)文系は、なかなか数学が苦手感っていうものが。自由が故にっていうところは難しいですもんね。」
10	「めっちゃめっちゃ面白いと思う。自分は全然やってみたいですけど。(ICT を用いた教材を作って、)他の先生方に共有はするんですけど、なかなか使用しているのはちょっと低い。今の教育現場的なところではって言われると(この実践を共有するのは)微妙ですよ。」
	「使っていけばいいんだけど、私のスキルであったりとか、その他の授業進度とか考えていくと、なかなか実践は、私はですね、ちょっと難しく感じてしまうなと思いました。」
11	「最初の掴みって大事になってくるという。この 1 時間(極限値の学習)だけじゃなくて、ちょっと 2 時間、3 時間っていうところが 1 つのパッケージでちょっとやるから、そこを通して単元の意義について考えていくよみたいなのを最初に言って、(微分の導入としての 4 時間が)ワンパッケージなのかっていうところを生徒がイメージできると良いな。」

参考資料(6) 指標Ⅲについての数学科教師へのインタビュー調査結果

該当番号の具体的な発言の一部例示である。発言に文脈上補足が必要な場合は、()内に記す。

1	「最初に習ったものが使える。それは数学の楽しさですよ。その思考の面白さ。っていうのが the それ(生徒の意欲)につながると思います。」
	「意欲的なものは高まるんじゃないかなって思う。いろんなところがつながってきて。」
	「(授業の担当に戻ってから)また、きっとそういった(自分たちで活動するような)授業をしてくれてっていうようなオーラが出てるのかなっていうのは感じますね。」
2	「『友達(のグラフ)ってなんだろう、俺の想像しているものと一緒なのかな。なんか違う表現して伝えてきよぞ。おもしれえ。』みたいなところとか(生徒が主体的に取り組むことができる)」
	「友達(の作成したグラフ)を見て、友達(が作成したグラフ)が面白いなっていう風に思ったりとか。1 人の庭だけじゃないですね。こういう活動ってすごい大事だな。」
	「自分たちで協力してとか、周りと協力してグラフを作ってみたりとか。コミュニケーションを図ってみたりとかっていうところは、生徒にとっては楽しい授業なのかなって。苦手とする生徒でも

	入りやすい授業なのかな。」
3	「自然と生徒から問いていうか疑問が生まれてくるので、すごく面白いなって。」
	「自分で気づいてっていうところも 1 個の手だと思いますけど、その中で自分が表現したものを周りから評価してもらうことで、またさらにもっと考えてみよう(主体的に学びに取り組むことができる)。」
4	「自分たちで勉強してきて、ここについてもっと知りたいんですけどつとかの姿勢が見え隠れすれば、これ(主体的な学習に対する態度)につながってくると思うけど。」
	「4 時間で(主体的な態度を)評価するのは、やっぱ少ない。でも、これを続けると違うかも。」
	「正直、(短い時間では)よくわからない。」

付録

付録 1 2 授業目におけるペアでの学習活動で使った授業プリント

次頁に掲載。

付録 2 3 授業目におけるクラス全体での学習活動で使った授業プリント

次々頁に掲載。

付録 3 平均変化率および接線の傾きを視覚的に捉える際に活用した GeoGebra

GeoGebra の「開く」にて“付録 3 平均変化率”で検索もしくは以下の URL から参照。

<https://www.geogebra.org/m/w2qqathz>

使用方法→画面左にある「数式」に既に入力されている関数の式を、使用したい関数の式に変更。

謝辞

本研究を進めるにあたり，適切なご指導をしてくださった

熊本大学教育学部 吉井 貴寿 准教授

に深く感謝の意を表します。

また，研究協力校の先生方には，普段の授業を観察させていただいた上に，インタビュー調査や授業実践を行う際にも多大なる協力をしていただきました。心より感謝申し上げます。

令和7年2月4日

安達 慧